Material para el Programa

"Apoyo al último año de la secundaria

para la articulación con el Nivel Superior"

MECyT - SE - SPU

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología

Secretaría de Educación

Secretaría de Políticas Universitarias

Primera edición: Abril de 2007

Realización editorial:
Editorial Universitaria de Buenos Aires
Sociedad de Economía Mixta
Av. Rivadavia 1571/73 (1033) Ciudad de Buenos Aires
Tel.: 4383-8025 / Fax: 4383-2202
www.eudeba.com.ar

Foto de tapa: *Silvina Piaggio*
Diseño de tapa: *Estudio mtres*
Diseño de interior: *Eudeba*

Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que establece la ley 11.723.

Miradas sobre el mundo de la matemática

Una curiosa selección de textos

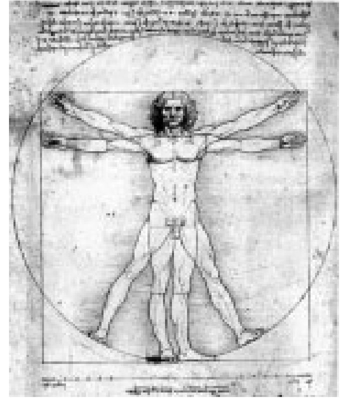
Diseñar...

¿Qué relaciones elegir?

Los secretos del hombre del renacimiento

Theoni Pappas

Este famoso dibujo de Leonardo da Vinci apareció en el libro *De Divina Proportione*, que ilustró para el matemático Luca Pacioli en 1509. En uno de sus cuadernos, Leonardo escribió una extensa sección sobre las proporciones del cuerpo humano. Allí determinó medidas y proporciones para todas las partes del cuerpo, incluyendo la cabeza, los ojos, las orejas, las manos y los pies, basándose en numerosos estudios, observaciones y mediciones. Además, hizo referencia a los trabajos de Vitruvio, el arquitecto romano (alrededor de 30 a.C.) que también se ocupó de las proporciones del cuerpo humano. Leonardo escribe sobre la manera en que Vitruvio ejerció influencia sobre él:



> *"Vitruvio, el arquitecto, dice en sus trabajos sobre arquitectura que las medidas del cuerpo humano han sido distribuidas por la naturaleza de la siguiente manera: ... Si se abren las piernas de tal modo de disminuir la propia estatura en un cuarto y se abren y alzan los brazo hasta que los dedos medios lleguen al nivel de la parte superior de la cabeza, se sabe que el centro del los miembros extendidos está en el ombligo, y el espacio entre las piernas será un triángulo equilátero."*

Y luego agrega Leonardo: "La longitud de los brazos extendidos de en hombre es igual a su altura".[1]

[1] Richter, Jean Paul, editor. *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, vol. 1, Dover Publications, 1970, New York.

Matematizando el cuerpo humano

Theoni Pappas

Presión sanguínea:	120/80
Colesterol:	180
Triglicéridos:	189
Glucosa:	80
Temperatura:	36,7° C.

En la medicina actual, nosotros, los pacientes, nos vemos bombardeados por números y porcentajes que analizan nuestra salud y la manera en que están funcionando nuestros cuerpos. Los médicos han tratado de definir los espectros numéricos que son normales. Los números y la matemática parecen estar en todas partes. En realidad, en nuestros cuerpos las redes de nuestro sistema cardiovascular, los impulsos eléctricos que nuestros cuerpos usan para producir movimientos, las maneras en que se comunican las células, el diseño de nuestros huesos, la misma estructura molecular de los genes... todos ellos poseen elementos matemáticos. En consecuencia, en un esfuerzo destinado a cuantificar las funciones del cuerpo humano, la ciencia y la medicina han recurrido a los números y a otros conceptos de la matemática. Por ejemplo, se han diseñado instrumentos para traducir los impulsos eléctricos del cuerpo a curvas sinusoides, haciendo de este modo factible la comparación de resultados. Los resultados de un electrocardiograma, un electromiograma, un ultrasonido, muestran la forma, amplitud y cambio de fase de una curva. Todo esto proporciona información al técnico entrenado. Números, porcentajes y gráficos son aspectos de la matemática adaptados a nuestros cuerpos. Consideremos ahora otros conceptos matemáticos y la forma en que se relacionan con el cuerpo.

Si usted cree que el descifrado de códigos, cifras y jeroglíficos mayas es un desafío excitante, imagínese lo excitante que es poder develar los códigos moleculares que el cuerpo usa para comunicarse. La ciencia ha descubierto ahora que los glóbulos blancos de la sangre están relacionados con el cerebro. La mente y el cuerpo se comunican por medio de un vocabulario de sustancias bioquímicas. El descifrado de estos códigos intercelulares ejercerá un impacto asombroso sobre la medicina, del mismo modo que nuestra creciente

comprensión de los códigos genéticos está revelando muchísimas ramificaciones dentro del campo de la salud. El descubrimiento de la doble hélice del ADN fue otro fenómeno matemático. Pero la hélice no es la única espiral presente en el cuerpo humano. La espiral equiangular se encuentra en muchas zonas de crecimiento... posiblemente porque su forma no cambia a medida que crece. Búsquela en la estructura de crecimiento de su cabello, en los huesos de su cuerpo, en la coclea del oído interno, en el cordón umbilical y tal vez hasta en sus huellas digitales.

Los aspectos físicos y fisiológicos del cuerpo también nos conducen a otras ideas matemáticas. El cuerpo es simétrico, lo que le da equilibrio y un centro de gravedad. Además de permitir el equilibrio, las tres curvas de la columna vertebral son muy importantes para el buen estado físico y para conferir al cuerpo la capacidad física de sostener su propio peso y otras cargas. Artistas como Leonardo Da Vinci y Alberto Durero trataron de ilustrar la concordancia del cuerpo con diversas proporciones y medidas, tales como la sección áurea.

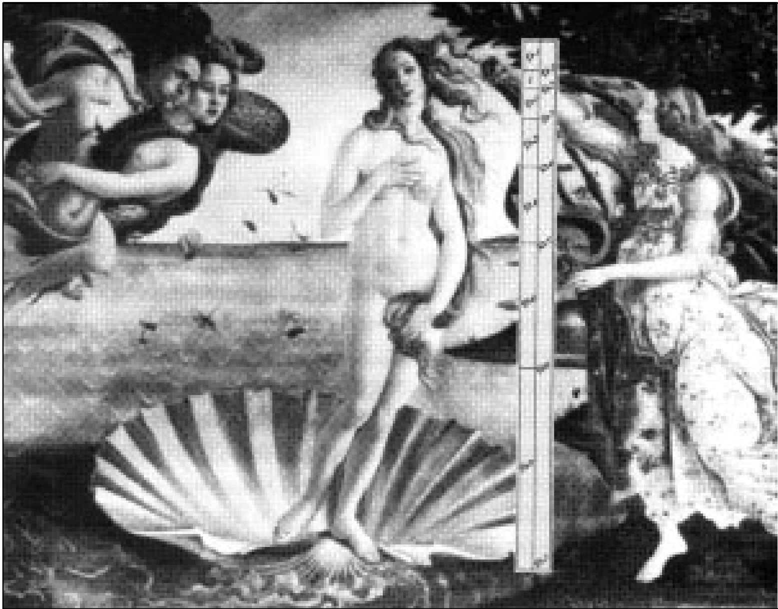
Por sorprendente que pueda parecer, la teoría del caos también tiene un lugar en el cuerpo humano. Por ejemplo, se está investigando la teoría del caos en relación con las arritmias. El estudio de los latidos del corazón y el motivo por el cual el corazón de algunas personas late irregularmente parece referimos a la teoría del caos.

Por sorprendente que pueda parecer, la teoría del caos también tiene un lugar en el cuerpo humano. Por ejemplo, se está investigando la teoría del caos en relación con las arritmias. El estudio de los latidos del corazón y el motivo por el cual el corazón de algunas personas late irregularmente parece referimos a la teoría del caos. Por añadidura, las funciones del cerebro y de las ondas cerebrales y el tratamiento de los desórdenes cerebrales también están relacionados con la teoría del caos.

Si exploramos el cuerpo a nivel molecular, también encontramos relaciones con la matemática. Hay formas geométricas, como poliedros y cúpulas geodésicas, presentes en las formas de varios virus invasores. En el virus del SIDA (HTLV-1) encontramos simetría icosaédrica y una estructura de cúpula geodésica. Los nudos que aparecen en las configuraciones del ADN han llevado a los científicos a usar descubrimientos matemáticos de la teoría de nudos para el estudio de las formas adoptadas por las cadenas de los ácidos nucleicos. Los hallazgos de la teoría de nudos y las ideas procedentes de diversa geometrías han probado ser invalorables para el estudio de la ingeniería genética.

La investigación científica y la matemática son una combinación esencial para descubrir los misterios del cuerpo humano y para analizar sus funciones.

Definitivamente la lógica y la matemática van de la mano. Pero la mayoría de las personas no consideran matemáticos a los juegos. Sin embargo, los juegos y las recreaciones son parte integral de la matemática. El desarrollo de muchas ideas fue resultado de la obstinación por resolver algún acertijo. Ciertas personas parecen empujadas por una fuerza invisible que los lleva a resolver pasatiempos y problemas. Esas personas forman parte del grupo que disfruta de la matemática y se sienten fascinadas por ella. Sin darse cuenta, pueden pasar horas, e incluso días, explorando diferentes ramificaciones de algo que ostensiblemente empezó como un sencillo pasatiempo. La historia da testimonio de que a veces los acertijos, juegos y pasatiempos han conducido a notables descubrimientos, e incluso a la creación de nuevos campos de la matemática. En realidad, el famoso matemático griego Arquímedes murió por estar absorto en un problema matemático. Las páginas que siguen revelarán algunos de los juegos, acertijos y ejercicios de calistenia mental que son favoritos de los matemáticos.



Theodore Cook publicó este análisis de El nacimiento de Venus *de Sandro Boticelli. En su libro* Curvas de la vida, *el autor afirma: "la línea que contiene la figura desde el tope de la cabeza hasta la planta de los pies está dividida a la altura del ombligo en proporciones exactas dadas por...la sección áurea (φ)...Tenemos siete términos consecutivos de la sección áurea en la composición completa".*

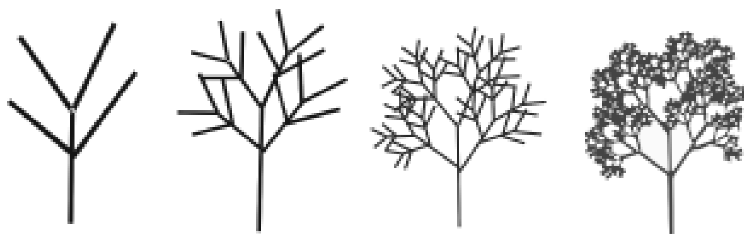
El jardín matemáticamente anotado

Theoni Pappas

"¡Buen día, día!, exclamó la jardinera para saludar al sol naciente y a sus plantas. Para nada se imaginaba que cosas muy extrañas acechaban en las hojas y en el rico suelo. En la profundidad de las raíces de las plantas había **fractales** y **redes** y, desde lirios, caléndulas y margaritas, la miraban **números de Fibonacci**.

La jardinera se embarcó en el diario ritual de atender su jardín. En cada lugar aparecía algo inusual, pero ella no reparaba en ello, cautivada solamente por las maravillas obvias que le ofrecía la naturaleza.

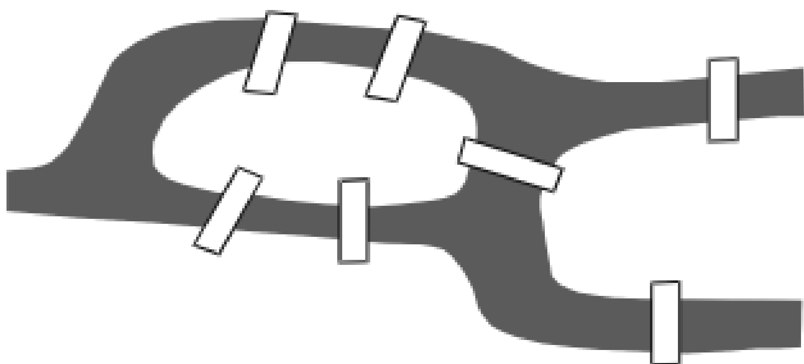
Primero fue a limpiar los helechos. Quitando las hojas muertas para exponer los brotes nuevos, no reconoció las **espirales equiangulares** que la saludaban, ni la formación fractal de las hojas de los helechos. De repente, al cambiar el viento, la invadió la adorable fragancia de la madreselva. Al observarla, vio cómo estaba pasando por encima del cerco e invadiendo los guisantes. Decidió que ya no podría evitar podarla juiciosamente. No advirtió que las hélices estaban en acción, ni que las hélices hacia la izquierda de la madreselva se habían enredado en algunas de las hélices hacia la derecha de los guisantes. Tendría que tener mucho cuidado para no dañar su nueva cosecha de guisantes.



Los fractales pueden aparecer como objetos simétricamente cambiantes/crecientes. En cualquier caso, los fractales cambian de acuerdo con reglas o esquemas matemáticos usados para describir y expresar el crecimiento de un objeto inicial. Pensemos en un fractal geométrico como en una estructura que se genera infinitamente.., la estructura es una constante réplica de sí misma, pero en una versión más pequeña. Así, cuando se magnifica una porción de fractal geométrico, tiene exactamente el mismo aspecto que la versión original. Como contraste, cuando se magnifica un objeto euclideano, como por ejemplo un círculo, empieza a parecer menos curvo. Un helecho es un ejemplo ideal de replicación fractal. Si se amplifica cualquier parte del helecho fractal, aparece como la hoja original del helecho. Se puede crear un helecho fractal con un ordenador.

Después se dirigió a desmalezar el terreno debajo del árbol de palma que había plantado para darle a su jardín un toque un poco exótico. Sus ramas se movían con la brisa, y la jardinera no tenía idea de que lo que le rozaba los hombros eran **curvas involutas**.

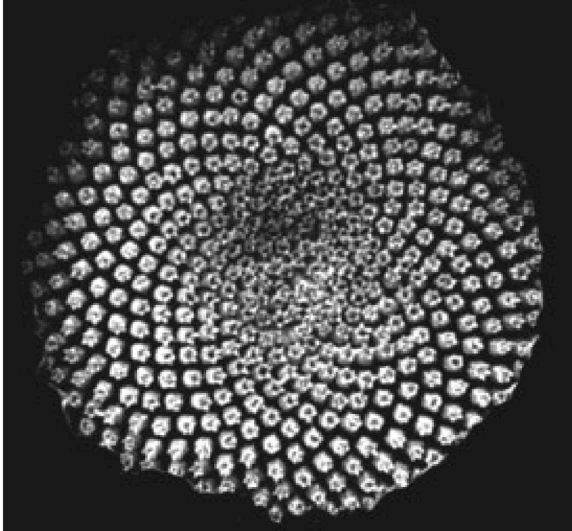
Miró con satisfacción sus plantas de maíz. "¡Muy bien!", pensó. Había vacilado en plantar maíz, pero se sentía estimulada por el buen crecimiento de las mazorcas jóvenes. Sin que ella lo supiera, los granos formarían triples junturas dentro de sus vainas.



Las redes son diagramas matemáticos que presentan un cuadro simplificado de un cierto problema o situación. Euler redujo un problema famoso conocido como Los Puentes de Königsberg *(cómo recorrer las dos riberas de un río y dos islas pasando por cada uno de los siete puentes de la ciudad de Königsberg y sin pasar dos veces por el mismo puente) a un diagrama simple de red, que analizó y resolvió. En la actualidad, las redes se usan como herramientas en la topología.*

¡Qué bien andaba el jardín, estallando en nuevos brotes! Admirando las nuevas hojas verdes del árbol de arce, reconoció que había algo absolutamente agradable en su forma... las líneas naturales de simetría habían hecho bien su trabajo. Y la filotaxis de la naturaleza sólo resultaba evidente para el ojo entrenado en los brotes de las hojas en las ramas y los tallos de las plantas.

Echando un vistazo a su alrededor, la jardinera se concentró en el cantero de las zanahorias. Estaba orgullosa de su crecimiento y advirtió que debía podarlas para asegurarse de que serían uniformes y de buen tamaño. No quería confiar a la naturaleza el teselado del espacio con zanahorias.



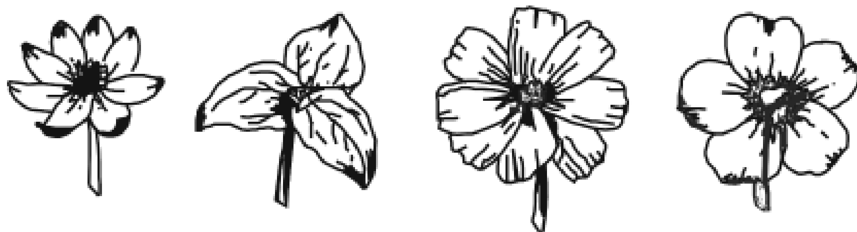
Espirales y hélices:

Las espirales son formas matemáticas que aparecen en muchas facetas de la naturaleza, como por ejemplo en la curva del helecho lira, las enredaderas, las conchas, los tornados, los huracanes, las piñas, la Vía Láctea, los remolinos. Hay espirales planas, espirales tridimensionales, espirales hacia la izquierda y hacia la derecha, equiangulares, logarítmicas, hiperbólicas, arquimedianas y hélices. Estos son tan sólo algunos tipos de espirales descritas por los matemáticos. La espiral equiangular aparece en formas de la naturaleza tales como la concha del nautilius, las semillas del centro del girasol, las telas de las arañas. Algunas de las propiedades de las espirales equiangulares son: los ángulos formados por tangentes y radios de la espiral son congruentes (de allí el término equiangular); crece en proporción geométrica, por lo que cualquier radio es cortado por la espiral en secciones que forman una progresión geométrica; y su forma no se altera a medida que crece.

No tenía idea de que en el jardín abundaban las **espirales equiangulares**. Estas se hallaban en las semillas de las margaritas y de diversas flores. Muchas cosas que crecen forman esta espiral por la manera en que conservan su forma mientras aumenta el tamaño.

Empezaba a hacer calor, de modo que la jardinera decidió continuar con su cultivo cuando bajara un poco el sol. Mientras tanto, hizo una evaluación final... admirando la combinación de flores, vegetales y otras plantas que había elegido con tanto cuidado. Pero una vez más, algo se le escapó. Su jardín estaba lleno de esferas, conos, poliedros y otras formas geométricas que ella no reconoció.

Los ***números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...*** *(cada número es la suma de los dos anteriores). Fibonacci (Leonardo da Pisa) fue uno de los principales matemáticos de la Edad Media. Aunque hizo una contribución significativa en los campos de la aritmética, el álgebra y la geometría, es popular en la actualidad por su secuencia de números, que son la solución de un problema intrincado que aparecía en su libro* Liber Abaci. *En el siglo XIX, el matemático francés Edouard Lucas editó una obra de matemática recreativa que incluía este problema. Fue en esa época cuando se ligó el nombre de Fibonacci a la secuencia numérica. En la naturaleza, la secuencia aparece en:*

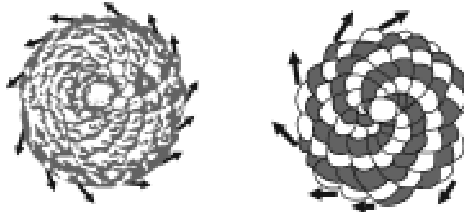


• *Flores* que *tienen* un número de *Fibonacci de pétalos*
(lirio, azucena, rosa silvestre, sanguinaria, trillo, iris).

Aunque la naturaleza exhibe sus maravillas en el jardín, la mayoría de las personas no reparan en la enorme cantidad de cálculos y de trabajo matemático que se ha vuelto tan rutinario en la naturaleza. La naturaleza sabe muy bien cómo trabajar con restricciones de materia y de espacio, y cómo producir las formas más armoniosas. Y así, durante cada día de primavera, la jardinera entrará a su dominio con los ojos brillantes. Buscará los nuevos pimpollos y brotes que produce cada día, ajena a las bellezas matemáticas que también florecen en su jardín.

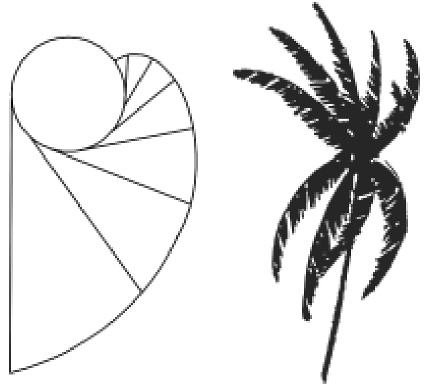
La disposición de hojas*, ramitos y tallos, conocida como filotaxis. Elija una hoja de un tallo y cuente el número de hojas (suponiendo que ninguna ha sido arrancada) hasta que llegue a una que está exactamente en línea con la elegida. El número total de hojas (sin contar la primera que usted eligió) suele ser, en muchas plantas, un número de Fibonacci, como ocurre en el caso del olmo, el cerezo o el peral.*

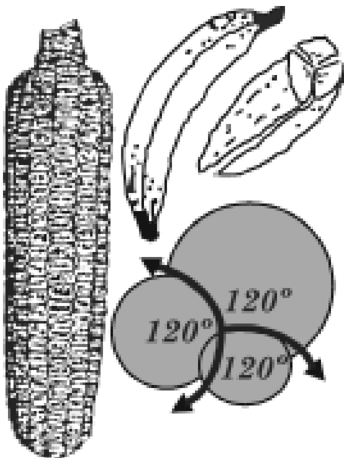




Los números de la piña: *Si se cuentan las espirales a la derecha y a la izquierda de un cono de pino, los dos números son con frecuencia números de Fibonacci consecutivos. Esto también ocurre en el caso de las semillas de girasol y de otras flores. Lo mismo sucede con el ananá o piña tropical. Si miramos la base del ananá y contamos el número de espirales a la izquierda y a la derecha, compuestas de escamas de forma hexagonal, veremos que son números de Fibonacci consecutivos.*

La curva evolvente: *a medida que un hilo se enrolla y desenrolla alrededor de una curva (por ejemplo, la circunferencia que limita a un círculo), el extremo libre describe una curva, llamada evolvente de la primera (en este caso es usual denominarla evolvente de círculo, cuando lo correcto sería evolvente de circunferencia; y ésta la evoluta de la otra). Evolvente de círculo es la forma que encontramos en el pico del águila, la aleta dorsal de un tiburón y la punta de una hoja de palmera, cuando pende.*





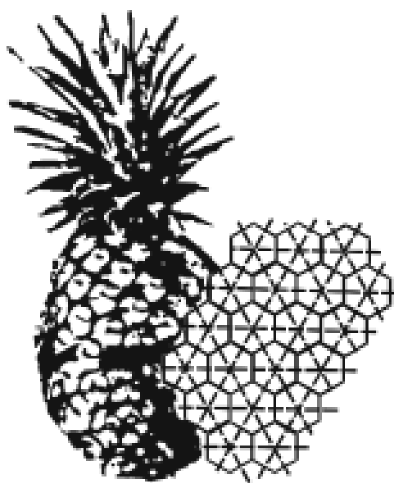
La triple *juntura: Una triple juntura es el punto en que se encuentran tres segmentos de líneas, y los ángulos de intersección son de 120°. Muchos fenómenos naturales se producen a partir de restricciones impuestas por los límites o la disponibilidad de espacio. La triple juntura es un punto de equilibrio hacia el que tienden ciertos procesos. Entre otros casos, se lo encuentra en los racimos de burbujas de jabón, en la formación de los granos de la mazorca de maíz, y en el resquebrajamiento de la tierra seca o de las piedras.*

La simetría: *La simetría es ese equilibrio perfecto que vemos y percibimos en el cuerpo de una mariposa, en la forma de una hoja, en la forma del cuerpo humano, en la perfección de un círculo. Desde un punto de vista matemático, se considera que un objeto posee simetría axial cuando podemos encontrar una línea que lo divide en dos partes idénticas, de manera que si pudiéramos doblarlo siguiendo esa línea, ambas partes coincidirían exactamente al ser superpuestas. Un objeto tiene simetría puntual o central cuando existen infinitas de esas líneas que pasan por un punto en particular; por ejemplo, un círculo tiene simetría puntual con respecto a su punto central.*



En el jardín aparecen muchos tipos de simetría. Por ejemplo, en esta fotografía podemos encontrar simetría puntual en las flores del brócoli, y simetría axial en las hojas.

El teselado: *Teselar un plano significa simplemente poder cubrirlo con baldosas planas de modo que no dejen intersticios libres y que no se superpongan, como ocurre en el caso de los hexágonos regulares, cuadrados u otros objetos. El espacio es teselado o llenado por objetos tridimensionales tales como cubos u octaedros truncados.*

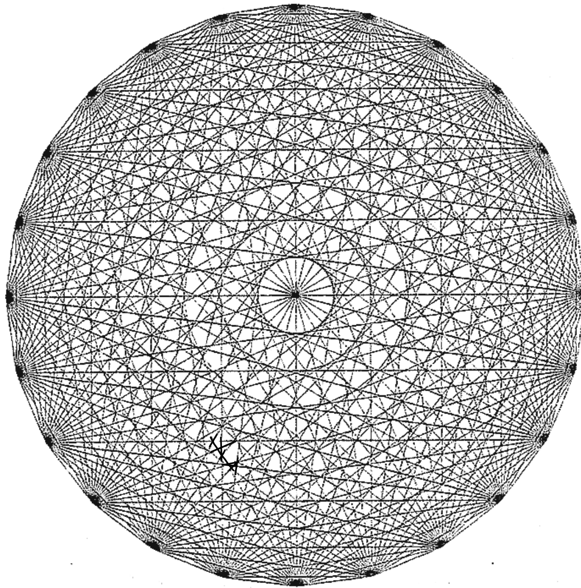


Diseños matemáticos y arte

Theoni Pappas

Bordados matemáticos

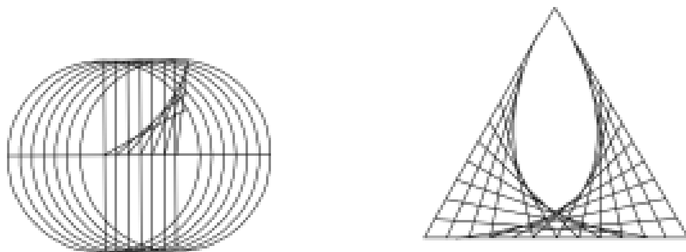
Los entusiastas de la matemática han estado "bordando" curvas matemáticas durante siglos. Siempre es fascinante descubrir una curva formada a partir de una serie de segmentos de línea recta. Los "puntos" (segmentos de línea) terminan siendo tangentes de la curva que forman. Es posible "bordar" matemáticamente un círculo, una elipse, una parábola, una hipérbola, una cardioide, una deltoide, etc. En el proceso de bordado de estas curvas, se pueden descubrir algunas de sus características especiales. He aquí cómo puede hacerse una astroide.



Cuando se trazan *las diagonales de un polígono de 24 lados aparecen círculos concéntricos.*

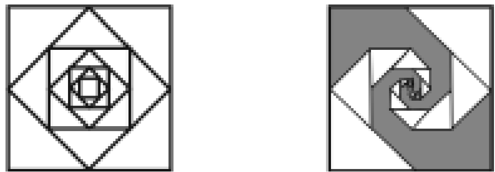


Una manera de hacer una astroide es pensar en ella como una escalera que se desliza. Los círculos, cuyos radios son la escalera, se usan para marcar la base de cada nueva posición.

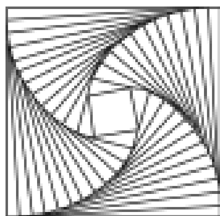


Variaciones de parábolas

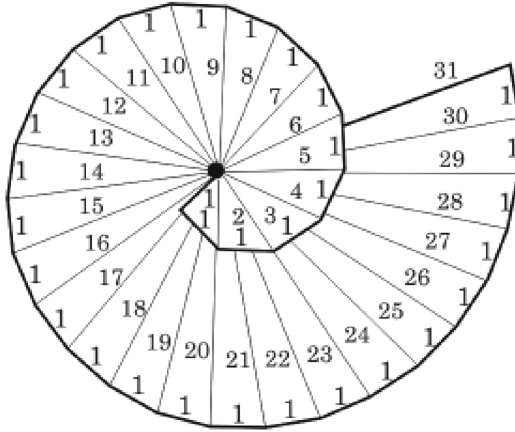
Espirales de líneas rectas



Los cuadrados anidados son el primer paso para hacer la espiral.



Cuatro arañas empiezan a avanzar desde los cuatro vértices de un cuadrado. Cada una se desplaza hacia la que está a su derecha, avanzando a velocidad constante. Así, están siempre situadas en los vértices de un cuadrado. Las curvas formadas por el recorrido son espirales equiangulares. El tamaño del cuadrado inicial y la velocidad de las arañas determina cuanto tiempo les llevará encontrarse.



Esta espiral se forma con las raíces cuadradas de los números, empleando el teorema de Pitágoras.

Las espirales son objetos matemáticos que parecen expresar movimiento. Abarcan una familia de curvas que va desde las espirales bídimensionales –la espiral equiangular (logarítmica) y la de Arquímedes– hasta las espirales tridimensionales como la helicoide y la concoide. Las espirales se relacionan con muchas áreas de nuestras vidas y muchos objetos vivos. Unos pocos ejemplos son: las astas de ciertos ciervos, algunas semillas de flores, muchas conchas marinas, el crecimiento de ciertas enredaderas, el ADN, la arquitectura, el arte, el diseño gráfico. Las espirales de líneas rectas se forman anidando polígonos regulares: cada polígono reducido se forma conectando los puntos medios de los lados del anterior. Observando un nido de polígonos resulta difícil distinguir la espiral hasta que no se la sombrea. Arriba se ve un interesante diseño producido por una de estas espirales de líneas rectas.

Hay muchas variantes de estas espirales. Algunas han sido relacionadas con la resolución de problemas, como el de las cuatro arañas.

Otra famosa espiral de líneas rectas es la que se forma construyendo raíces cuadradas mediante el teorema de Pitágoras.

Geometría no euclídea

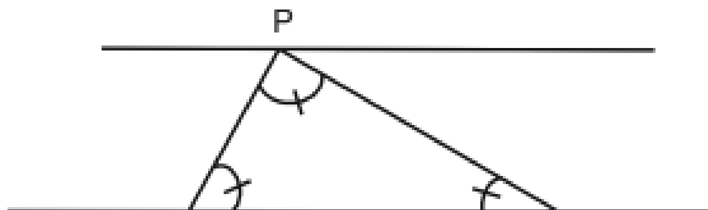
John Allen Paulos

En la confusión de propiedades relativas a los triángulos y paralelogramos, semejanza y congruencia, áreas y perímetros, se olvida a veces el carácter deductivo de la geometría. Muchas de esas propiedades fueron descubiertas por los egipcios y los antiguos babilonios a partir de rutinas prácticas de la agrimensura, el comercio y la arquitectura. Los griegos demostraron que todas podían deducirse a partir de unas pocas de ellas. Es fácil formular la idea fundamental. Se escogen algunas suposiciones geométricas "evidentes" que se llaman axiomas y a partir de ellas se deducen, con la única ayuda de la lógica, toda una serie de enunciados geométricos que se llaman teoremas. En su tratamiento del tema, Euclides escogió cinco axiomas (en realidad son diez, pero sólo cinco de ellos eran geométricos) y dedujo el bello y prestigioso cuerpo de teoremas que se conoce como geometría euclídea. (Véase la entrada acerca del *Teorema de Pitágoras*).

Uno de los cinco axiomas de Euclides es el conocido como postulado de las paralelas. Decía (y sigue diciendo) que por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una recta paralela a la dada, y sólo una. Una conocida consecuencia del postulado de las paralelas es el teorema que dice que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°.

Como no parecía tan intuitivo como los otros cuatro axiomas, a lo largo de la historia los matemáticos han tratado esporádicamente de deducirlo a partir de ellos. Se inventaron todos los métodos que uno pueda imaginar pero nunca dieron con una demostración. Este fracaso, unido a la naturalidad de los otros axiomas, parecía conferir a la geometría euclídea un cierto carácter absoluto. A lo largo de un par de milenios reinó como un monumento al sentido común y la verdad eterna. Immanuel Kant llegó a decir incluso que la gente sólo podía pensar el espacio en términos euclídeos. Por fin, en el siglo XIX los matemáticos János Bolyai, Nicolai Lobachevski y Karl Friedrich Gauss se dieron cuenta de que el quinto postulado de Euclides es independiente de

los otros cuatro y no se puede deducir de ellos. Es más, comprendieron que se puede sustituir el quinto postulado por su contrario y tener también un sistema geométrico consistente.

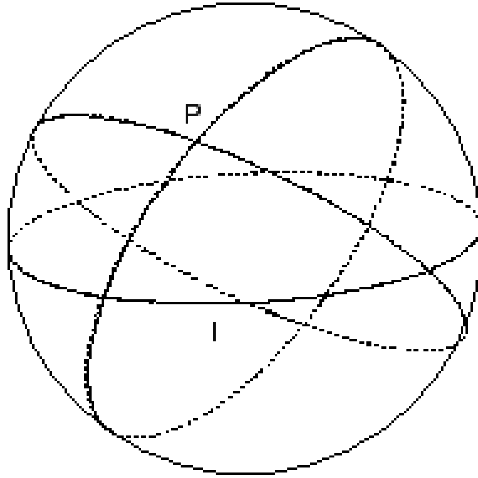


La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por P pasa una recta paralela a 1, y una sola

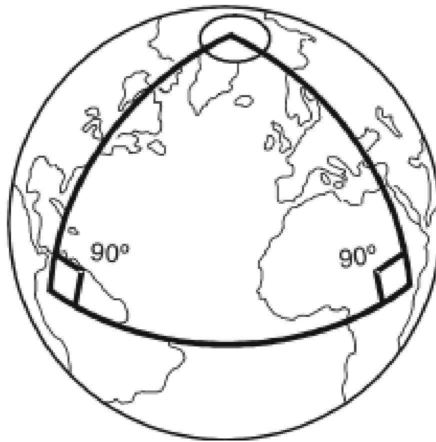
Para ver esto, obsérvese que es perfectamente posible interpretar los términos fundamentales de la geometría de un modo completamente distinto sin salirse, no obstante, de los límites de la lógica más estricta. Exactamente igual que "todos los A son B y C es un A, luego C es un B" nos sirve de justificación para los argumentos más dispares, según sean las interpretaciones de A, B y C, también los términos de la geometría euclídea se pueden interpretar de un modo nada convencional sin dejar de llevarnos a teoremas válidos. Por ejemplo, en vez de las interpretaciones habituales podemos llamar "plano" a la superficie de una esfera, "punto" a un punto sobre una esfera y "línea recta" a los círculos máximos de la esfera (cualquier arco de circunferencia alrededor de la esfera que la divide en dos mitades). Si adoptamos estos significados, la "línea recta" sigue siendo el camino más corto entre dos puntos (sobre la superficie de la esfera) y tenemos una interpretación de la geometría que cumple todos los axiomas de Euclides excepto el postulado de las paralelas. También se cumplen todos los teoremas deducibles a partir de estos cuatro axiomas.

Comprobando los axiomas, observamos que por dos "puntos" cualesquiera pasa una "línea recta", pues dados dos puntos cualesquiera sobre la superficie de una esfera hay un círculo máximo que pasa por ellos. (Nótese que el círculo máximo que pasa por Los Ángeles y Jerusalén cruza por Groenlandia y es la distancia más corta entre ambas ciudades). Dado un "punto" y una distancia cualesquiera, hay un "círculo" sobre la superficie de la esfera con centro en ese punto y cuyo radio es esa distancia (que no es más

que un círculo normal sobre la superficie de la esfera). Y también, dos "ángulos rectos" cualesquiera son iguales, y cualquier "segmento de recta" (un pedazo de círculo máximo) se puede prolongar indefinidamente.



No hay ninguna "línea recta" paralela a la "línea recta" 1 que pase por P.
En esta interpretación se cumplen todos los demás axiomas de Euclides

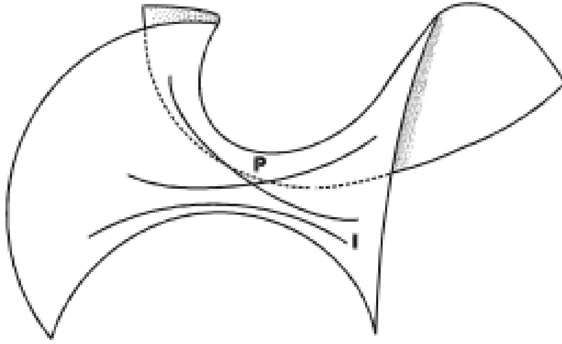


Los "segmentos de recta" que unen Kenia, Ecuador y el Polo Norte forman un "triángulo" cuyos ángulos suman más de 180°

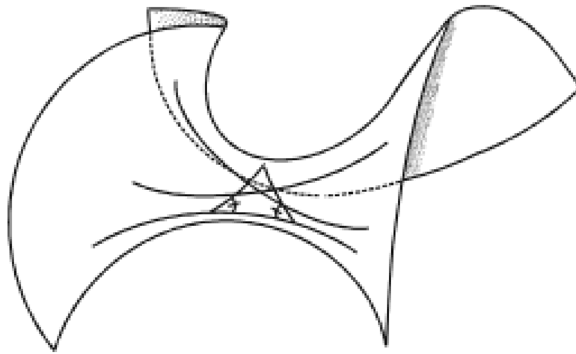
Sin embargo, el axioma de las paralelas no es válido en esta interpretación particular de los términos, pues dada una "línea recta" y un punto exterior a ella, no hay ninguna "línea recta" paralela a la dada que pase por dicho punto. A modo de ejemplo, tomemos el ecuador como la "línea recta" y la Casa Blanca en Washington como "punto" exterior a la misma. Cualquier "línea recta" que pase por la Casa Blanca será un círculo máximo que divida la Tierra en dos mitades y, por tanto, cortará necesariamente el ecuador, con lo que no podrá serle paralela. Otra anomalía de esta interpretación es que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre mayor que 180°. Para demostrarlo, podemos sumar los ángulos del "triángulo" formado por la parte del ecuador comprendida entre Kenia y Ecuador y los "segmentos de recta" que unen "puntos" de estos países con el Polo Norte. El triángulo esférico así formado tiene dos ángulos rectos en el ecuador.

Hay otras interpretaciones no estándar de los términos "punto", "recta" y "distancia" en los que son válidos los cuatro primeros axiomas de la geometría euclídea y el postulado de las paralelas es falso, aunque por otro motivo: por un punto exterior a una recta dada hay más de una paralela. En estos modelos (que podrían consistir, por ejemplo, en superficies en forma de silla de montar) la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180°. El matemático alemán Bernhard Riemann concibió superficies más generales todavía y geometrías en las que el concepto de distancia varía de un punto a otro de un modo parecido a como le ocurre a un viajero que se mueve por un terreno muy irregular y accidentado.

Cualquier modelo que, por la razón que sea, no cumpla el postulado de las paralelas se dice que es un modelo de geomería no euclídea. Cada una de las geometrías presentadas es un conjunto consistente de proposiciones (exactamente igual que las constituciones de distintas naciones son diferentes conjuntos de leyes consistentes entre sí). Cuál de ellas es la verdadera en el mundo real es una cuestión que depende de qué significado físico demos a los términos "punto" y "recta", y se trata de una cuestión empírica que se ha de dilucidar mediante la observación y no por proclamas de salón. Localmente al menos, el espacio parece tan euclídeo como un campo de maíz de Iowa, pero como ya han descubierto los partidarios de la tierra plana de cualquier parte del mundo, es peligroso extrapolar demasiado lejos la propia estrechez de miras. Si tomamos la trayectoria de un rayo de luz como interpretación de línea recta, obtenemos una geometría física no euclídea.



Si en esta superficie en forma de silla de montar interpretamos "línea recta" como la distancia más corta entre dos puntos, son válidos todos los axiomas de la geometría euclídea excepto el postulado de las paralelas. Por P pasa más de una paralela a 1



Los ángulos de un triángulo sobre esta superficie suman menos de 180°

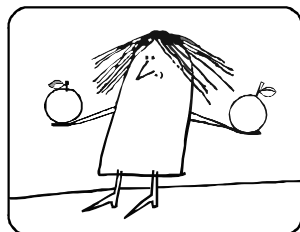
Para terminar, me gusta pensar en el descubrimiento de la geometría no euclídea como una especie de chiste matemático –chiste que Kant no entendió. Muchos acertijos y chistes son de la forma "¿Qué tiene esta propiedad, aquélla y la de más allá?". Al oírlos, la respuesta que se le ocurre a uno inmediatamente es completamente distinta de la interpretación inesperada de las condiciones que constituye la esencia del chiste. Así ocurre con la geometría no euclídea. En vez de "¿Qué es negro, blanco y rojo por todas partes?" tenemos "¿Qué cumple los primeros cuatro axiomas de Euclides?". La nueva esencia de este chiste nos la dieron Bolyai, Lobachevski y Gauss: grandes humoristas del Club Universo.

Argumentar...

¿a dónde nos conduce?

Metalenguajes

Martin Gardner

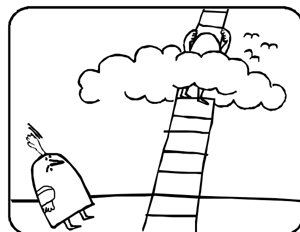


Las paradojas semánticas se resuelven introduciendo metalenguajes. Los enunciados relativos al mundo, tales como "las manzanas son rojas" o "las manzanas son azules", se formulan en un *lenguaje objeto.* Los enunciados relativos a valores de verdad tienen que hacerse en un *metalenguaje.*



En este ejemplo no puede haber paradoja, porque la frase *A,* que se supone escrita en metalenguaje, habla del valor de verdad de la frase *B,* que está escrita en lenguaje objeto.

¿Cómo hablar de valores de verdad para enunciados de un metalenguaje? Es preciso utilizar un metalenguaje de nivel superior. Cada peldaño de esta escala infinita es metalenguaje del peldaño inferior inmediato, y es lenguaje objeto del peldaño situado sobre él.



La noción de metalenguaje fue ideada y desarrollada por el matemático polaco Alfred Tarski. En el peldaño más bajo se encuentran los enunciados relativos a objetos, tales como "Marte tiene dos lunas". En este lenguaje no pueden aparecer calificativos como *verdadero* o *falso.* Para hablar de la veracidad o falsedad de frases formuladas en este lenguaje tenemos que emplear un metalenguaje, situado en el peldaño inmediatamente superior de la escala. El metalenguaje engloba la totalidad del lenguaje objeto, pero es más "rico", porque permite referirse a los valores de verdad de los enunciados del lenguaje objeto. Por citar uno de los ejemplos favoritos de Tarski, "La nieve es blanca" es un enunciado del lenguaje objeto. En cambio, "El enunciado 'La nieve *es* blanca' es verdadero" es una proposición de un metalenguaje.

¿Puede hablarse de veracidad o falsedad de enunciados de un metalenguaje? Sí, pero sólo ascendiendo hasta el tercer peldaño de la escala, y hablando en un metalenguaje aún más alto, capaz de aludir a todos los situados bajo él.

Cada peldaño de la escala es un lenguaje objeto del peldaño situado inmediatamente sobre él. Cada peldaño, a excepción del *más* bajo, es metalenguaje del inmediatamente inferior. La escala continúa hacia arriba tanto cuanto deseemos.

Ejemplos de enunciados correspondientes a los cuatro primeros peldaños son:

A. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 180 grados.

B. El enunciado *A* es verdadero.
C. El enunciado *B* es verdadero.
D. El enunciado *C* es verdadero.

El lenguaje de nivel *A* enuncia sencillamente teoremas relativos a objetos geométricos. Un manual de geometría que contenga demostraciones de los teoremas está escrito en un metalenguaje de nivel *B*. Los libros que tratan de teoría de demostración están escritos en metalenguaje de nivel *C*. Afortunadamente, en matemáticas, raras veces es necesario ir más allá del nivel *C*.

El ubicuo número 9

Martin Gardner

El número 9 tiene muchas misteriosas propiedades. ¿Sabía usted que el número está escondido tras el natalicio de toda persona famosa? Fijémonos en la fecha de nacimiento de George Washington, que fue el 22 de febrero de 1732. Escribamos tal fecha con un solo número; 2221732. Ahora reordenamos las cifras y formamos con ellas otro número distinto cualquiera. Restemos el menor del mayor. Sumemos todas las cifras de la diferencia. En este caso la suma es 36. ¡Y 3 más 6 son 9! Haciendo lo mismo con el natalicio de John F. Kennedy (29 de mayo de 1917), o de Charles De Gaulle (22 de noviembre de 1890), o de cualquier otro hombre o mujer famoso, siempre se obtiene 9. ¿Habrá alguna curiosa relación entre el 9 y los natalicios de las personas famosas? ¿Ha probado el lector con su propia fecha de nacimiento?

Al sumar todas las cifras de un número, y luego sumar todas las cifras de la suma, y continuar así hasta lograr un número de una sola cifra, lo que se obtiene es la *raíz digital* del número de partida. La raíz digital de un número es igual al resto de su división por *9, y* por esta razón el procedimiento se llama a veces "expulsión de los nueves", y en España, "prueba del nueve".

La forma más rápida de calcular la raíz digital consiste en ir separando los nueves, desechándolos conforme se van sumando las cifras del número. Por ejemplo, si las dos primeras cifras fuesen 6 y 8, que suman 14, inmediatamente se suman 1 y 4, y se conserva el 5. Dicho de otra forma, cada vez que una suma parcial tenga más de una cifra, sumaremos las cifras de la suma, y llevaremos sólo la suma. La última de las obtenidas será la raíz digital del número. Se dice también que la raíz digital es congruente, o equivalente, módulo 9 al número de partida, lo que suele abreviarse "mód. 9". Como al dividir 9 entre 9 el resto es 0, en aritmética de módulo 9, el 0 y el 9 son equivalentes.

Antes de la llegada de las máquinas de cálculo, los contables solían valerse de esta aritmética de módulo 9 para verificar sumas, diferencias, productos y cocientes de números grandes. Por ejemplo, si hemos de multiplicar *A* por *B,* y obtenemos *C,* podemos comprobar nuestro trabajo multiplicando la raíz digital de *A* por la de *B* y viendo si este producto, o su raíz digital, es igual a

la raíz digital de *C*. Si el producto *C* está bien calculado, forzosamente los resultados deberán coincidir. La coincidencia *no* basta para demostrar que el producto está bien calculado, pero de no producirse, sí podremos asegurar que hay un error. Cuando hay coincidencia es bastante probable que el resultado sea correcto. Las "pruebas de los nueves", basadas en el cálculo de las raíces digitales de los operandos y resultado de sumas, diferencias, productos y divisiones son parecidas.

Estamos ahora en condiciones de comprender por qué funciona el truco de las fechas de nacimiento. Imaginemos un número N formado por muchas cifras. Reordenándolas obtendremos un segundo número, *N'*. Como es obvio, N y *N'* tendrán iguales raíces digitales. Por tanto, al restar una de otra estas raíces la diferencia será 0 (que es ígual a 9 en aritmética mód. 9). Este número, 009**,** tiene que ser la raíz digital de la diferencia entre N y *N'*. En resumen: tomando un número cualquiera, reordenando sus cifras y restando el menor del mayor, la diferencia tendrá raíz digital igual a 0 ó a 9.

A causa del procedimiento con que se calcula la raíz digital, sólo podrá darse la diferencia final 0 si N y *N'* son números idénticos. Por tanto, al ensayar el procedimiento con sus fechas de nacimiento, nuestros amigos deberán comprobar que al desordenar las cifras resulta número distinto. En tanto N y *N'* no sean idénticos, su diferencia tendrá raíz digital 9.

Hay muchos trucos de magia basados en el ubicuo número 9. Pidámosle a alguien que anote el número de un billete, permaneciendo nosotros de espaldas para no ver lo que esta persona escribe. La persona reordena las cifras, construyendo otro número, y en seguida resta el número menor del mayor. Pídale a su amigo que tache en la diferencia una cifra cualquiera *distinta* de cero, y que nos dé a continuación las cifras restantes, *en cualquier orden*. Aunque seguimos de espaldas, ¡no deberíamos tener dificultad en decir cuál era la cifra tachada!

El secreto del truco debería ser evidente. La diferencia tendrá raíz digital 9. Conforme nuestro amigo va nombrando las cifras nosotros las sumamos mentalmente, despreciando los nueves. Al terminar de dárnoslas, nosotros restaremos de 9 el último dígito calculado, y la diferencia es la cifra tachada. (Si nuestro último dígito fuese 9, la cifra tachada fue un 9.)

Los trucos del billete y de la fecha de nacimiento son excelentes introducciones al estudio de las congruencias, que algunos llaman "aritmética modular".

Matrices mágicas

Martin Gardner

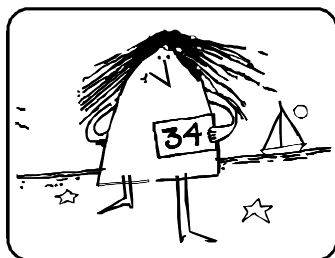
Copie esta matiz de 4 por 4 en una hoja, y numere de 1 a 16 sus casillas. Voy a hacerle una exhibición de fuerza psíquica que le dejará atónito. ¡Voy a dirigir y controlar una selección de cuatro números realizada por usted en la matriz!

Rodee con un círculo un número cualquiera, a su capricho. En el dibujo se ha marcado el 7; lo mismo puede tomarse otro cualquiera. Tache con una barra vertical la columna que lo contiene, y otro tanto con la fila.

Ahora rodee otro número cualquiera de los no tachados todavía. Vuelva a tachar la fila y columna de éste. Elija a su capricho un tercer número no tachado, y suprima también su fila y columna. Finalmente, rodee el único número restante.

Si usted ha seguido mis indicaciones, el casillero presentará más o menos este aspecto. Sume ahora los cuatro números seleccionados.

¿Preparado? Voy a decirle cuánto vale la suma que usted ha calculado. Es..., es... ¡34! ¿Es correcta? ¿Cómo he podido yo saberlo? ¿Será que he influido sobre usted en el momento de elegir?



¿Por qué nos obliga esta matriz a que la suma de los números elegidos sea siempre 34? Su secreto es tan sencillo como ingenioso. En el encabezamiento de una matriz de 4 por 4 escribamos los números 1, 2, 3, 4; a la izquierda de cada hilera ponemos los números 0, 4, 8, 12:

	1	2	3	4
0				
4				
8				
12				

Estos ocho números se llaman *generadores* de la matriz mágica. En cada casilla se escribe ahora el número suma de sus dos generadores, a saber, la suma del situado a la cabeza de la columna con el escrito al costado de su fila. Una vez rellenado de este modo el casillero encontraremos una matriz que contiene los números de 1 a 16 en orden correlativo.

	1	2	3	4
0	1	2	3	4
4	5	6	7	8
8	9	10	11	12
12	13	14	15	16

Veamos ahora qué sucede al ir señalando cuatro números según el procedimiento indicado. Tal procedimiento garantiza que *no serán elegidos dos números de una misma fila o columna*. Cada número de la matriz es suma de un único par de generadores; por consiguiente, la suma de los cuatro números señalados será igual a la suma de los ocho generadores. Y como los generadores suman en total 34, también los cuatro números elegidos habrán de sumar 34.

Una vez comprendido el funcionamiento de la matriz, se pueden construir matrices mayores de tamaño arbitrario. Fijémonos, por ejemplo, en la matriz de orden 6 siguiente, con sus 12 generadores. Observemos que en este caso los generadores han sido elegidos de manera que los números del casillero parezcan dados al azar. Queda así oculta la estructura subyacente de la matriz, haciendo que parezca aún más misteriosa:

	4	1	5	2	0	3
1	5	2	6	3	1	4
5	9	6	10	7	5	8
2	6	3	7	4	2	5
4	8	5	9	6	4	7
0	4	1	5	2	0	3
3	7	4	8	5	3	6

Los generadores suman 30. Elegidos seis números por el procedimiento explicado, con certeza sumarán 30. El número mágico (la suma) podrá ser, desde luego, cualquier número que se desee.

Es posible construir una matriz de 10 por 10 que implique suma 100 o cualquier otro número curioso, como el año en curso, o el año de nacimiento de una persona. ¿Podrán construirse matrices mágicas que contengan en algunas casillas números negativos? ¡Claro que sí! En realidad, los generadores pueden ser números cualesquiera, positivos o negativos, racionales o irracionales.

¿Podrán construirse matrices donde el cálculo del número mágico se haga *multiplicando* los elegidos, en vez de sumarlos? Sí; y ello sugiere otro camino a explorar. La construcción fundamental sigue siendo exactamente la misma. El número impuesto, en este caso, resulta ser *producto* del conjunto de generadores. Tal vez le interese averiguar qué sucede si las casillas son ocupadas por números complejos. Puede encontrarse más material sobre matrices mágicas consultando el segundo capítulo de mi *Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.*

Las curiosas alfombras de Randi

Martin Gardner

Randi, mago famoso conocido en todo el mundo, tiene una alfombra de 13 por 13 decímetros, y la quiere transformar en otra de 8 por 21. Para ello, Randi llevó su alfombra a Omar, un especialista.

Randi: Omar, amigo mío, quiero que cortes esta alfombra en cuatro piezas, y luego montes con ellas una alfombra rectangular de 8 por 21 decímetros.

Omar: Lo lamento, señor Randi, Es usted un gran mago, pero no anda bien de aritmética. 13 por 13 son 169, mientras que 8 por 21 son 168. No podrá ser.

Randi: Querido Omar, el gran Randi jamás se equivoca. Ten la bondad de cortar la alfombra en cuatro piezas como éstas.

Omar hizo como se le dijo. Después Randi reagrupó las piezas, y Omar las cosió, formando una alfombra de 8 por 21.

Omar: ¡No puedo creerlo! ¡El área se ha contraído, de 169 a 168 dm^2! ¿Qué ha ocurrido con el decímetro cuadrado que falta?

Esta clásica paradoja es tan sorprendente y difícil de explicar que vale la pena tomarse la molestia de dibujar el cuadrado en papel milimetrado, recortar las cuatro piezas y reagruparlas en forma de rectángulo. A menos que las piezas sean muy grandes y hayan sido recortadas y dibujadas con gran precisión, será imposible observar la leve superposición que se produce a lo largo de la diagonal principal del rectángulo. Esta ligera imperfección del ajuste de las piezas a lo largo de la diagonal explica la desaparición de una unidad de superficie. Si duda usted de la existencia de traslapado tiene un método sencillo para convencerse: calcule usted la pendiente de la diagonal del rectángulo, y compárela con las pendientes de las piezas.

¿Qué sucedería si dibujásemos el rectángulo en papel milimetrado, recortásemos las piezas, y construyéramos el cuadrado? Tal vez le entren deseos de averiguarlo.

En esta paradoja intervienen cuatro números: 5, 8, 13, 21. Seguramente haya usted reconocido en ellos cuatro términos de una famosa sucesión.

¿Sabría usted dar la regla recursiva que va generando los términos? La sucesión es conocida por sucesión de Fibonacci, y en ella cada término resulta de sumar los dos precedentes: 1, 1, 2, 3,5, 8, 13, 21, 34,...

Otras variantes de esta paradoja se basan en otros grupos de cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci. En cada caso descubrimos que el rectángulo tiene distinta área que el cuadrado; unas veces es una unidad de más; otras, de menos. El paso siguiente es descubrir que cuando hay pérdida al pasar del cuadrado al rectángulo es a causa de un "solapamiento" de forma rómbica sobre la diagonal principal, a lo largo de la cual se produce la superposición, mientras que cuando hay ganancia es a causa de una rendija, también rómbica, que ensancha la diagonal.

Dados los cuatro términos de la sucesión de Fibonacci en que se basa alguna de estas versiones, ¿podremos predecir si habrá pérdida o ganancia? La paradoja sirve para ilustrar una de las propiedades fundamentales de la sucesión de Fibonacci. Al elevar al cuadrado uno cualquiera de los términos de la sucesión, el cuadrado resultante es igual al producto de los términos adyacentes por cada lado a dicho término, más o menos una unidad. Algebraicamente,

$$t^2_n = (t_{n-1} \cdot t_{n+1}) \pm 1$$

El primer miembro de la igualdad equivale, como es obvio, al área del cuadrado, mientras que el segundo da el área del rectángulo. Los signos "más" y "menos" van alternándose a lo largo de toda la sucesión. Todo número de Fibonacci que ocupe lugar impar en la sucesión (por ejemplo, 2, 5 ó 13 en la sucesión de Fibonacci dada arriba) tiene un cuadrado una unidad mayor que el producto de los términos de lugar par adyacentes a él. Recíprocamente, todo número situado en lugar par (por ejemplo, 3, 8, 21, ... en la sucesión) tiene un cuadrado que es una unidad menor que el producto de los términos adyacentes, ambos de lugar impar, que lo escoltan. Sabiendo esto, es fácil predecir si el rectángulo asociado a un cuadrado dado ganará o perderá una unidad de superficie.

La sucesión de Fibonacci empieza 1, 1; pero una "sucesión de Fibonacci generalizada" puede comenzar con dos números cualesquiera. Pueden entonces explorarse variantes de la paradoja basadas en otras sucesiones más generales. Por ejemplo, la sucesión 2, 4, 6, 10, 16, 26, ... da pérdidas y ganancias de cuatro unidades de área. La sucesión 3, 4, 7, 11, 18, ... da pérdidas y ganancias de cinco unidades.

Sean *a, b, c* tres términos consecutivos cualesquiera de una sucesión de Fibonacci generalizada, y sea x la pérdida o ganancia. Se verifican las siguientes relaciones:

$$a + b = c$$

$$b^2 = ac \pm x$$

En lugar de *x* podemos tomar cualquier pérdida o ganancia que deseemos, y en lugar de *b*, la longitud que nos parezca conveniente para lado del cuadrado. Resolviendo el sistema de ecuaciones tendremos los valores de *a* y *c*. Empero, puede ocurrir que las soluciones no sean números racionales.

¿Podremos cortar el cuadrado de forma tal que al redisponer las piezas el rectángulo tenga área exactamente *igual* a la del cuadrado?

Para responder a esto, pongamos x 0 en la segunda de las ecuaciones anteriores, y despejemos *b* en función de *a*. La única solución positiva es

$$b = \frac{(1 + \sqrt{5})\,a}{2}$$

La expresión (1 + Ö5)/ 2 es la famosa razón áurea, ordinariamente denotada f (phi). Es éste un número irracional de valor 1,618033... Dicho de otra forma, la única sucesión de Fibonacci en la que el cuadrado de cada término es exactamente igual al producto de sus dos términos adyacentes es

$$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \phi^4, \ldots$$

Con cierto trabajo de manipulación de los radicales podríamos demostrar que la sucesión anterior es una verdadera sucesión de Fibonacci, viendo que es equivalente a la sucesión

$$1, \phi, \phi + 1, 2\phi + 1, 3\phi + 2, \ldots$$

Tan sólo si se descompone el cuadrado en longitudes que sean números consecutivos de la sucesión anterior podremos conseguir que las áreas del rectángulo y el cuadrado sean idénticas (aunque, claro, ¿cuál es ahora la paradoja?). Para saber más acerca de la razón áurea, y de su relación con la paradoja del cuadrado y el rectángulo, véase el capítulo dedicado a en mi *Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions.*

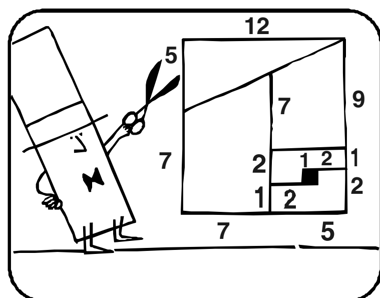
Pocos meses después. Randi retornó con una alfombra de 12 por 12 decímetros.

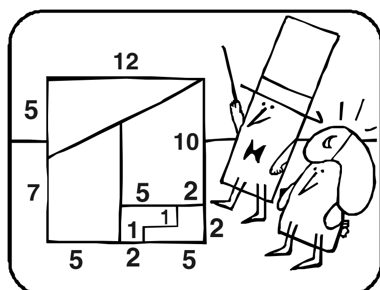
Randi: Omar, viejo amigo, mi estufilla eléctrica se cayó sobre esta preciosa alfombra y la ha quemado. Yo creo que cortándola y recosiéndola será fácil reparar el agujero.

Aunque Omar no lo veía nada claro, siguió al pie de la letra las instrucciones de Randi. Después de cosidas las piezas, la alfombra seguía midiendo 12 por 12 ¡y el agujero había desaparecido!

Omar: Se lo ruego, señor Randi, ¡dígame cómo lo ha conseguido! ¿De dónde ha salido el decímetro cuadrado necesario para llenar el hueco?







¿Cómo podrán cuadrados idénticos tener áreas diferentes? En la segunda de estas paradojas, la pérdida de área viene en forma de agujero real y manifiesto. A diferencia de la paradoja anterior, el ajuste a lo largo de la línea oblicua es perfecto. ¿Qué habrá podido sucederle a la unidad cuadrada que falta?

Para dar con la respuesta, haga usted dos ejemplares del cuadrado sin agujero; cuanto mayores, tanto mejor. Uno de los cuadrados debe ser recortado con la máxima precisión, descompuesto, y sus piezas reagrupadas con objeto de que aparezca el agujero. Una vez en esta disposición, situemos sobre ella el cuadrado no descompuesto, ajustándolo cuidadosamente por arriba y los costados. Se verá entonces que el "cuadrado" del agujero no es un verdadero cuadrado, sino un rectángulo cuya altura es 1/12 de decímetro mayor que la base. Esta tira que sobresale por la parte baja mide 12 por 1/12, y tiene la misma superficie que el agujero del interior.

Tenemos así explicado dónde ha ido a parar el cuadrado unidad. Pero ¿por

qué aumenta la altura del cuadrado? El secreto es que el vértice situado sobre la hipotenusa de la pieza rectangular no se encuentra en un punto reticular, es decir, sus coordenadas no son ambas enteras. Sabiendo esto podrá usted construir variantes del cuadrado en las cuales la pérdida o ganancia superficial sea mayor de una unidad cuadrada.

Esta paradoja es conocida por "paradoja de Curry", en recuerdo de su inventor, Paul Curry, mago aficionado neoyorquino. La paradoja admite numerosas variantes, incluidas formas triangulares. Si se quiere saber más sobre cuadrados y triángulos de Curry, véase el capítulo 8 de mi libro *Mathematics, Magic and Mystery* y el capítulo 11 de mis *New Mathematical Diversions from Scientific American* (versión española, *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Alianza Editorial, 1982).

Distintos tipos de infinito

Adrián Paenza

Contar

Un niño, desde muy pequeño, sabe contar. Pero ¿qué quiere decir *contar?* En realidad, dado un conjunto de objetos cualquiera, digamos los discos que alguien tiene en su colección, ¿cómo hace para saber cuántos tiene? La respuesta parece obvia (y en realidad, parece porque lo es). Pero quiero contestarla. La respuesta es: para saber cuántos discos tiene uno en su colección, lo que tiene que hacer es ir y contarlos.

De acuerdo. Es un paso que había que dar. Pero ¿qué quiere decir contar? Van al sitio donde tienen guardados los discos y empiezan: 1, 2, 3,… etcétera.

Pero:

a) Para poder contar se necesita conocer los números (en este caso, los números naturales).

b) Los números que usamos están ordenados, pero a nosotros *el orden no nos interesa*. ¿Se entiende esto? A ustedes sólo les importa saber *cuántos tienen* y no en qué orden está cada uno. Si yo les pidiera que los *ordenaran por preferencia*, entonces sí importaría el orden. Pero para saber cuántos hay, el orden es irrelevante.

c) Ustedes saben que el proceso termina. Es decir, su colección de discos, por más grande que sea, en algún momento se termina.

Ahora supongamos que estamos dentro de un cine. Todavía no ha llegado nadie para presenciar la próxima función. Sabemos que hay mucha gente en la calle haciendo cola y esperando que se abran

las puertas.

¿Cómo haríamos para saber si las butacas que tiene el cine alcanzarán para poder sentar a las personas que esperan afuera? O, en todo caso, ¿cómo haríamos para saber si hay más butacas que personas, o más personas que butacas, o si hay la misma cantidad? Evidentemente, la respuesta inmediata que todo el mundo está tentado a dar es: "Vea. Yo cuento las butacas que hay. Después cuento las personas. Y para terminar el proceso, comparo los números".

Pero eso requiere *contar dos conjuntos*. Es decir: hay que *contar las butacas y luego (o antes) hay que contar las personas*.

¿Es necesario *saber contar* para poder contestar si hay más butacas que personas, o personas que butacas o la misma cantidad? La respuesta que podríamos dar es la siguiente: abramos las puertas del cine, permitamos a la gente que entre y se siente en el lugar que quiera, y cuando el proceso termine, repito, *cuando el proceso termine* (ya que tanto las butacas como las personas *son conjuntos finitos),* nos fijamos si quedan butacas vacías; eso significa que había más butacas que personas. Si hay gente parada sin asiento (no se permite más de un asiento por persona), entonces había más gente que lugar. Y si no sobra ninguna butaca y nadie está parado, eso quiere decir que había el *mismo número de butacas que de personas*. Pero lo notable de esto es que uno puede dar la respuesta sin necesidad de haber contado.

Sin necesidad de saber cuál es ni el número de personas ni el número de butacas.

Éste no es un dato menor en este contexto: lo que uno está haciendo es *aparear* a los dos conjuntos. Es como si tuviéramos dos bolsas: una en donde están las personas y otra en donde están las butacas. Y lo que hacemos es trazar "flechitas" que le "asignen" a cada persona una butaca. Sería el equivalente a cuan- do uno compra una entrada en el cine. Si sobran entradas o si faltan entradas o si hay la misma cantidad, es en realidad una manera de haber trazado las flechitas. Pero lo bueno de este proceso es que no hace falta saber contar.

El segundo paso importante es que cuando yo quiera comparar el número de elementos de dos conjuntos, no necesito saber contar. Lo que tengo que hacer es *aparearlos*, establecer *flechitas* entre uno y otro.

Sólo para ponernos de acuerdo con las notaciones, vamos a llamar *cardinal* de un conjunto A (y lo vamos a *notar* #(A)) al *número de elementos de ese conjunto.*

Por ejemplo,

- (el cardinal del conjunto "jugadores titulares de un equipo de fútbol profesional") = # {jugadores titulares de un equipo de fútbol profesional} = 11,
- (el cardinal del conjunto "presidentes de la nación") = # {presidentes de la nación} = 1,
- (el cardinal del conjunto "universidades nacionales en la argentina") = # {universidades nacionales en la argentina}= 36,
- (el cardinal del conjunto "puntos cardinales") = # {puntos cardinales} = 4.

Como hemos visto, si queremos *comparar los cardinales de dos conjuntos* no hace falta *saber el cardinal de cada uno para saber cuál es el más grande o si son iguales.* Basta con aparear los elementos de cada uno. Debe quedar claro, entonces, que para comparar cardinales uno se *libera* del proceso de contar. Y esto será muy importante cuando tengamos que "generalizar" la noción de contar, justamente.

Una última observación antes de pasar a los conjuntos infinitos. Los números naturales son los conocidos e hipermencionados en este libro:

N = {1, 2, 3 ,4, 5…}

Vamos a llamar *segmento de los naturales de longitud n al subconjunto* {*1, 2, 3,…, (n-2), (n-1), n*}. A este segmento lo vamos a denotar [1, n].

Por ejemplo, el *segmento natural de longitud cinco,*

[1, 5] = {1, 2, 3, 4, 5}

[1, 35] = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…, 30, 31, 32, 33, 34, 35}

[1, 2] = {1, 2}

[1, 1] = {1}

Creo que se entiende entonces que todos estos "segmentos naturales" o "segmentos de números naturales" comienzan con el número uno; la definición entonces es:

[1, n] = {1, 2, 3, 4, 5,…, (n-3), (n-2), (n-1), n}.

En realidad podemos decir que *contar los elementos de un conjunto finito* significa "aparear" o *coordinar* o "poner las flechitas" entre los elementos del conjunto que nos dieron y algún *segmento natural.* Dependiendo del *n* vamos a decir que el conjunto tiene *cardinal n.* O, lo que es lo mismo, vamos a decir que el conjunto tiene *n* elementos.

Una vez entendido esto, ya sabemos entonces lo que son los conjuntos *finitos.* Lo bueno es que también podemos aprovecharnos de esta definición para entender lo que significa un conjunto *infinito.*

¿Qué definición dar? Intuitivamente, y antes de que yo escriba una definición tentativa, piensen un instante: ¿cuándo dirían que un conjunto es infinito? Y por otro lado, cuando piensan en esa definición, ¿en qué conjunto piensan?, ¿qué ejemplo tienen a mano?

La definición que voy a dar de conjunto *infinito* les va a parecer sorprendente, pero lo curioso es que es la más obvia: vamos

a decir que un conjunto es *infinito* si no es finito. ¿Qué quiere decir esto? Que si nos dan un conjunto A y nos piden que decidamos si es finito o infinito, lo que uno tiene que tratar de hacer es buscar un *segmento natural para coordinarlo o aparearlo con él.* Si uno encuentra algún *número natural n,* de manera tal que el segmento [1, n] y el conjunto A se pueden aparear, uno tiene la respuesta: el conjunto *es finito.* Pero, si por más que uno trate, no puede encontrar el tal segmento natural, o lo que es lo mismo, cualquier segmento natural que uno busca siempre se queda *corto,* entonces es porque el conjunto A es *infinito.*

Ejemplos de conjuntos infinitos:

a) Los números naturales (todos)
b) Los números pares
c) Los números múltiplos de cinco
d) Los puntos de un segmento
e) Los puntos de un triángulo
f) Los números *que no son múltiplos de 7.*

Los invito a que busquen otros ejemplos.[1]

Hablemos ahora un poco de los conjuntos infinitos. En este mismo libro hay varios ejemplos (hotel de Hilbert, cantidad y distribución de los números de primos) que atentan contra la intuición. Y eso es maravilloso: la intuición, como cualquier otra cosa, se *desarrolla, se mejora.* Uno *intuye distinto* cuanto más datos tiene. Cuanto más acostumbrado está a pensar en cosas diferentes, *mejor se prepara para tener ideas nuevas.*

Agárrense fuerte entonces, porque empezamos ahora un viaje por el mundo de los conjuntos *infinitos*. Abróchense el cinturón y prepárense para pensar distinto.

1. El conjunto vacío es el único que tiene "cardinal" cero. Esto, para salvar el "bache" lógico que se generaría, ya que como el "conjunto vacío" no se puede "aparear" con ningún segmento natural, entonces, no sería "finito". Luego, sería "infinito". Ese obstáculo lógico se salva o bien excluyendo al "vacío" de la discusión o bien, como elijo hacer, diciendo que el "conjunto vacío" es el único que tiene "cardinal cero".

Problema

Unos párrafos más arriba vimos cómo hacer para decidir cuál de dos conjuntos tiene más elementos (o si tienen el mismo cardinal). Decimos, para fijar las ideas, que dos conjuntos son *coordinables* si tienen *el mismo cardinal*. O sea, si tienen el *mismo número de elementos*. Como vimos, ya no necesitamos contar en el sentido clásico. Por ejemplo, el conjunto de todos los números naturales sabemos que es un conjunto *infinito*.

¿Qué pasará con los números pares? Les propongo que hagan el ejercicio de *demostrar* que también son infinitos, o lo que es lo mismo, los números pares *son un conjunto infinito*.

Pero la pregunta cuya respuesta parece atentar contra la intuición es la siguiente: si N son todos los números y P son los números pares, ¿en qué conjunto hay más elementos? Yo sé que esto invita a una respuesta inmediata (*todos los números tienen que ser más, porque los números pares están contenidos* entre todos). Pero esta respuesta está basada en algo que no sabemos más si es cierto para conjuntos infinitos: ¿es verdad que por el *simple hecho de que los pares forman parte de todos los números entonces son menos?* ¿Por qué no tratamos de ver si podemos usar lo que aprendimos en el ejemplo de las butacas y las personas? ¿Qué habría que hacer? Deberíamos tratar de *coordinar o aparear o unir con flechitas* a todos

los números y a los números pares. Eso nos va a dar la respuesta correcta.

Veamos. De un lado, en una bolsa, están todos los números naturales, los que forman el conjunto N. Del otro lado, en otra bolsa, están los números pares, los que forman el conjunto P.

Si yo hago la siguiente asignación (teniendo en cuenta que a la izquierda están los números del conjunto N y a la derecha, los elementos del conjunto P):

1 “ 2

2 “ 4

3 “ 6

4 “ 8

5 “ 10

6 “ 12

7 “ 14

(¿Entienden lo que estoy haciendo? Estamos *asignando a cada número de N un número de P*)

Es decir, a cada número de la izquierda, le hacemos corresponder *su doble*. Si siguiéramos así, al número *n* le hacemos corresponder el número *2n*. Por ejemplo, al número 103 le corresponde el 206. Al número 1.751, le corresponde el 3.502, etcétera.

Ahora bien: ¿está claro que a todo número de la izquierda le corresponde un número de la derecha? ¿Y que cada número de la derecha es par? ¿Y está claro también que a cada número par (de la derecha) le corresponde un número de la izquierda (justamente la mitad)? ¿Queda claro que hay *una correspondencia biunívoca o una coordinación entre ambos conjuntos?* ¿Queda claro que este proceso muestra que *hay la misma cantidad de números naturales que de números pares?* Esta afirmación es algo que en principio atenta contra la intuición. Pero es así. Liberados del problema de tener que *contar*, ya que en este caso no podríamos hacerlo porque el proceso no terminaría nunca en la medida en que los conjuntos son infinitos, lo que acabamos de hacer es mostrar que N y P son coordinables. O sea, que tienen el mismo número de elementos.

En el camino queda destruido un argumento que sólo es válido para conjuntos finitos: *aunque un conjunto esté contenido en otro, eso no significa que por eso tenga menos elementos*. Para conjuntos infinitos, eso no necesariamente es cierto, como acabamos de ver en el ejemplo de todos los números y los números pares.[2]

Éste es ya un juguete nuevo. Con esto podemos divertirnos un rato y empezar a preguntar: ¿y los impares? Bueno, supongo que cualquiera que haya seguido el argumento de los párrafos anteriores está en condiciones de decir que también hay tantos impares como números todos. Y por supuesto que hay tantos impares como pares.

A esta altura, conviene que diga que al *cardinal* de estos conjuntos infinitos que vimos hasta acá (naturales, pares, impares), se lo llama "aleph cero". (Aleph es la primera letra del alfabeto hebreo, y aleph cero es la notación que se usa universalmente para *indicar el número de elementos de conjuntos infinitos coordinables* con el conjunto de los números naturales).

¿Qué pasará ahora si consideramos los números enteros? Recuerden que los números enteros son *todos los naturales,* pero a los que se les agregan *el cero y todos los números negativos*. A los enteros se los denomina con la letra Z (del alemán Zahl) y son:

$$\{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

2. Es más: en algunos libros se da como *definición de conjunto infinito* a un conjunto que tiene subconjuntos propios (o sea, que no *son todo el conjunto*) coordinables con el *todo*.

Está claro, entonces, que los enteros forman un conjunto infinito. De paso, es bueno observar que si un conjunto contiene como *subconjunto* a un conjunto infinito, éste tiene que ser infinito también (¿no les dan ganas de pensarlo solos?).

Pero volvamos al problema original. ¿Qué pasa con Z? Es decir, ¿qué pasa con los enteros? ¿Son más que los naturales?

Para mostrar que el cardinal de ambos conjuntos es el mismo, lo que tenemos que hacer es encontrar una correspondencia biunívoca (es decir, flechitas que salgan de un conjunto y lleguen al otro sin dejar "libre" ningún elemento de ninguno de los dos conjuntos).

Hagamos las siguientes asignaciones:

Al 0 le asignamos el 1

Al -1 le asignamos el 2

Al +1 le asignamos el 3

Al -2 le asignamos el 4

Al +2 le asignamos el 5

Al -3 le asignamos el 6

Al +3 le asignamos el 7

Y así podremos asignarle a *cada número entero* un número natural. Está claro que no quedará ningún entero sin que le corresponda un natural, ni recíprocamente, ningún natural sin que tenga un entero asignado a su vez. Es decir, hemos comprobado con esto *que el conjunto* Z de los números enteros *y el conjunto* N de los números naturales tienen el mismo cardinal. Ambos tienen cardinal aleph cero. Es decir, los enteros y naturales

tienen la misma cantidad de elementos.

Como ejercicio, los invito a que prueben que también tienen cardinal aleph cero (y por lo tanto tienen la misma cantidad de elementos que los enteros o los naturales) los números múltiplos de cinco, las potencias de dos, de tres, etcétera. Si llegaron hasta acá y todavía están interesados, no dejen de pensar los distintos casos y cómo encontrar la *correspondencia* que demuestra que todos estos conjuntos (aunque parezca que no) tienen todos el mismo cardinal.

Ahora peguemos un pequeño salto de calidad. Consideremos los *números racionales*, que llevan el nombre de Q (por "quotient", o "cociente" en inglés). Un número se llama *racional* si es el cociente de dos números enteros: a/b (excluyendo el caso, obviamente, en que b sea cero). Ya sabemos, como hemos visto en otra parte del libro, que *no se puede dividir por cero.*

En realidad, los números racionales son los que se conocen como "las fracciones", con numerador y denominador números enteros. Por ejemplo, (-7/3), (17/5), (1/2), 7, son números racionales. Es interesante notar, que cualquier número entero *es también un número racional,* porque todo número entero *a* se puede
escribir como una fracción o como cociente de él mismo por 1. O sea:

$$a = a/1$$

Lo interesante es tratar de ver que, aunque *parezcan muchísimos más, los racionales también tienen a aleph cero como cardinal.* O sea, también son coordinables con los naturales. Así, en el lenguaje común (que es el útil), *hay tantos racionales como naturales.*

La demostración es interesante porque lo que vamos a hacer es una asignación que irá en espiral. Ya se va a entender.

Hacemos así:

Al 0 le asignamos el 1
Al 1/1 le asignamos el 2
Al 1/2 le asignamos el 3
Al 2/1 le asignamos el 4
Al 2/2 le asignamos el 5
Al 3/1 le asignamos el 6
Al 3/2 le asignamos el 7
Al 3/3 le asignamos el 8
Al 4/1 le asignamos el 9
Al 4/2 le asignamos el 10
Al 4/3 le asignamos el 11
Al 4/4 le asignamos el 12
Al 5/1 le asignamos el 13
Al 5/2 le asignamos el 14
…

Como se ve, a cada número racional *no negativo (o sea, mayor o igual que cero)* le asignamos un número natural. Esta asignación es biunívoca, en el sentido de que a todo racional le corresponde un natural y viceversa. La única observación que habría que considerar es que hice todo esto para los racionales

positivos. Si uno quiere agregar los negativos, la asignación *debe* ser diferente, pero creo que el lector sabrá ingeniarse para hacerla (en todo caso, en la página de soluciones hay una propuesta para hacerlo).

Una observación que surge es que en la columna de la izquierda yo estoy *pasando* varias veces por el mismo número. Por ejemplo, el 1 en la columna de la izquierda aparece como 1/1, 2/2, 3/3, 4/4, etcétera; o sea, aparece muchas veces. ¿Afecta esto la cardinalidad? Al contrario. En todo caso, si uno tiene que conjeturar algo a priori, es que el conjunto de los racionales *parece tener más elementos* que los naturales y, sin embargo, la asignación que acabo de ofrecer muestra que *tienen el mismo cardinal.* En todo caso, muestra que a pesar de repetir varias veces el mismo racional, sigue habiendo naturales para todos ellos. Lo cual es un hecho francamente notable y antiintuitivo.

Y ahora llegamos al punto central. La pregunta que uno tiene que hacerse es la siguiente: da la sensación de que *todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal.* Es decir, hemos revisado los naturales, los pares, los impares, los enteros, los racionales, etcétera. *Todos* los ejemplos que hemos visto de conjuntos infinitos resultaron ser coordinables a los naturales, o lo que es lo mismo, tienen todos el mismo cardinal: aleph cero.

Con todo derecho, entonces, uno podría decir: "Bueno. Ya sabemos cuáles son los conjuntos infinitos. Habrá muchos o pocos, pero todos tienen el mismo cardinal". Y aquí es donde aparece un punto central en la teoría de conjuntos. Hubo un señor que hace muchos años, alrededor de 1880, se tropezó con un problema. Tratando de demostrar que todos los conjuntos infinitos tenían el mismo cardinal, encontró uno que no. El señor, por más esfuerzos que hacía por encontrar "las flechitas" para poder coordinar *su conjunto* con los números naturales, *no podía.* Tal era su desesperación que en un momento cambió de idea (e hizo algo genial, claro, porque tuvo una idea maravillosa) y pensó: "¿y si no puedo encontrar las flechitas porque no es posible encontrarlas? ¿No será preferible que trate de *demostrar que no se pueden encontrar las flechitas porque no existen?*".

Este señor se llamó Georg Cantor. Van a encontrar una breve reseña biográfica de él en otra parte del libro, pero al margen de lo que allí diga, a Cantor lo volvieron loco. La comunidad científica especialista en el tema lo enloqueció, literalmente.

Cuando Cantor descubrió que había *infinitos más grandes que otros,* dijo: "Lo veo y no lo creo".

Pero ¿qué es lo que hizo Cantor? Para entenderlo, necesito recordar aquí por un momento qué es el desarrollo decimal de un número (sin entrar en

demasiados detalles). Por ejemplo, cuando definí los números racionales, digamos el número 1/2, quedó claro que este número también se puede escribir así:

1/2 = 0,5

Y agrego otros ejemplos:

1/3 = 0,33333…

7/3 = 2,33333…

15/18 = 0,8333…

37/49 = 0,75510204…

Es decir, cada número racional tiene un desarrollo decimal (que se obtiene, justamente, haciendo el cociente entre los dos números enteros). Lo que sabemos de los números racionales es que al hacer el cociente, el desarrollo decimal es, o bien finito (como en el caso de 1/2 = 0,5, porque después vendrían sólo ceros a la derecha de la coma), o bien es periódico, como 1/3 = 0,33333…, en donde se repite un número (en este caso el 3), o podría ser un conjunto de números (que se llama *período)*, como en el caso de (17/99) = 0,17171717… en donde *el período es 17,* o bien, en el caso de (1743/9900) = 0,176060606… en donde

el *período* es 60.

Es más: podemos decir que todo número racional tiene un desarrollo decimal finito o periódico. Y al revés: dado un desarrollo decimal finito o periódico cualquiera, eso corresponde a un único número racional.

A esta altura, yo creo que puedo suponer que los lectores *entienden lo que es el desarrollo decimal.*

Con todo, hay números que *no son racionales*. Son números *que tienen un desarrollo decimal* pero que se sabe que no son racionales. El ejemplo más famoso es π (pi). Se sabe (no lo voy a probar aquí) que π no es un número racional. Si siguen interesados en más ejemplos, en este mismo libro está la demostración que "enloqueció" a los pitagóricos de que "la raíz cuadrada de 2" (Ö2) *no es racional.* Y por otro lado, por allí también anda el número *e*, que *tampoco es racional.*

Ustedes saben que el número π tiene un desarrollo decimal que empieza así:

π = 3,14159…

El número Ö2 tiene un desarrollo decimal que empieza así:

Ö2 = 1,41421356…

El número *e* tiene un desarrollo decimal que empieza así:

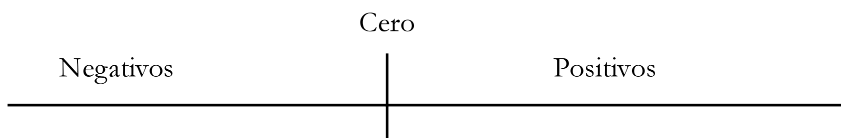
e = 2,71828183…

La particularidad que tienen *todos estos números* es que tienen un desarrollo decimal que *no termina nunca* (en el sentido de que no aparecen ceros a la derecha de la coma a partir de ningún momento) y *tampoco son periódicos* (en el sentido de que no hay un lugar del desarrollo a partir del cual *se repita indefinidamente un segmento de números).* Estos dos hechos están garantizados porque los *números en cuestión no son racionales.* Es más: las cifras de cada número son imposibles de predecir en función de las anteriores. No siguen ningún patrón.

Creo que se entiende entonces cuáles son esta clase de números. Más aún: todo número *real* que no sea *racional* se llama *irracional.* Los tres ejemplos que acabo de poner son tres números irracionales.

Cantor propuso entonces: "voy a probar que hay un conjunto infinito que *no se puede coordinar con los naturales*". Y para eso, siguió diciendo: "el conjunto que voy a tomar es el de *todos los números reales* que están en el segmento [0,1]".[3]

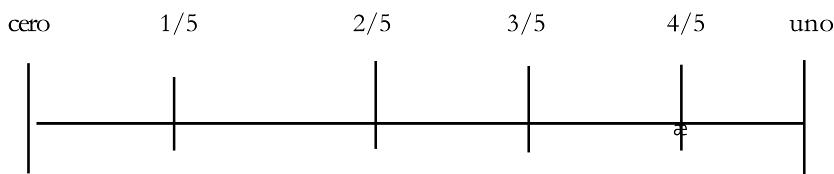
Un momento: tomen una recta, marquen un punto cualquiera y llámenlo *cero.* Los puntos que están a la derecha se llaman *positivos* y los que están a la izquierda *se llaman negativos.*



Cada punto de la recta corresponde a una *distancia del cero.* Ahora marquen un punto cualquiera más a la derecha del cero. Ése va a ser el número 1 para

3. Aquí conviene decir que los números *reales* consisten en la unión del conjunto de los *racionales* y el de los *irracionales* (o sea, los que *no son racionales).*

ustedes. A partir de allí, uno puede construir los números *reales*. Cualquier otro punto de la recta está a una distancia del cero que está medida por la longitud del segmento que va desde el cero hasta el punto que usted eligió. Ese punto es un número real. Si está a la derecha del cero, es un número real positivo. Si está a la izquierda, es un número real negativo. Por ejemplo el 1/2 es el punto que está a la mitad de la distancia de la que usted marcó como 1. El (4/5) está a cuatro quintas partes del cero (es como haber partido el seg-



mento que va desde el 0 hasta el 1 en cinco partes iguales, y uno se queda con el punto que queda al elegir las primeras cuatro).

Está claro, entonces, que a cada punto del segmento que va entre el 0 y el 1, le corresponde un número real. Ese número real, puede ser *racional o irracional*. Por ejemplo, el número (•Ö2 - 1) = 0.41421356…. es un número irracional que está en ese segmento. El número (p/4), también. Lo mismo que el número (*e* - 2).

Cantor tomó entonces el segmento [0,1]. Son todos los números reales del segmento *unitario*. Este conjunto es un conjunto *infinito de puntos*. Piénsenlo así: tomen el 1, dividan al segmento por la mitad: tienen el 1/2. Divídanlo ahora por la mitad: tienen el número (1/4). Divídanlo por la mitad: tienen el (1/8). Como se advierte, dividiendo por la mitad cada vez, uno obtiene siempre un punto que está en la mitad de la distancia del que

tenía antes. Eso va generando una sucesión *infinita* de puntos: (1/2n), *todos* los cuales están en el segmento [0,1].

Falta poco. Cantor dijo entonces: "voy a suponer que este conjunto (segmento unitario) se puede *coordinar con los naturales*". O sea, supuso que *tenían el mismo cardinal*. Si esto fuera cierto, entonces debería haber una asignación (o lo que llamamos "las flechitas") entre los elementos del segmento [0,1] y los números naturales. Resultaría posible, como en los ejemplos anteriores, que podríamos poner en una *lista* a todos los elementos del segmento [0,1].

Y eso hizo:

1	$0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\dots$
2	$0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\dots$
3	$0, a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\ a_{35}\ a_{36}\dots$
4	$0, a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\ a_{45}\ a_{46}\dots$
…	
n	$0, a_{n1}\ a_{n2}\ a_{n3}\ a_{n4}\ a_{n5}\ a_{n6}\dots$

En este caso, lo que representan los distintos símbolos de la forma a_{pq}, son los dígitos del desarrollo de cada número. Por ejemplo, supongamos que éstos son los desarrollos decimales de los primeros números de la lista:

1	0,783798099937…
2	0,523787123478…
3	0,528734340002…
4	0,001732845…

Es decir,

$$0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}\ a_{16}\dots = 0{,}783798099937\dots$$

$$0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\dots = 0{,}523787123478\dots$$

y así siguiendo.

O sea, lo que Cantor hizo fue suponer que existe una manera de “poner flechitas”, o de hacer “asignaciones”, de manera tal que *todos los números reales* del segmento [0,1] estuvieran coordinados con los naturales.

Y ahora, la genialidad de Cantor: “voy a construir un número que *está* en el segmento [0,1], pero que *no está en la lista*”.

Y lo fabricó así: se construyó el número

$$A = 0, b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ b_6\ b_7\ b_8\dots$$

Uno *sabe* que este número está en el segmento [0,1], porque empieza con 0,… ¿Pero quiénes son las letras b_k? Bueno, Cantor dijo:

Tomo

b_1 de manera que sea un dígito diferente de a_{11}
b_2 de manera que sea un dígito diferente de a_{22}
b_3 de manera que sea un dígito diferente de a_{33}
…
b_n de manera que sea un dígito diferente de a_{nn}

De esta forma, tengo garantizado que el número A no está en la lista. ¿Por qué? No puede ser el primero de la lista, porque el b_1 *difiere de* a_{11}. No puede ser el segundo, porque el b_2 difiere de a_{22}. No puede ser el tercero, porque el b_3 difiere de a_{33}. No puede ser el enésimo, porque el b_n difiere de a_{nn}.[4]. Luego, Cantor se fabricó un número *real* que está en el segmento [0,1] *que no está en la lista.* Y esto lo pudo construir independientemente de cuál fuera la lista.

Es decir, si viene cualquier otra persona y le dice "yo tengouna lista diferente de la suya, y la mía sí funciona y contiene *todoslos números reales del intervalo [0,1]*", Cantor puede *aceptarle cualquier desafío, porque él puede construir un número real que debería estar en la lista, pero que no puede estar.*

Y eso culmina la demostración, porque prueba que si uno quiere hacer una correspondencia biunívoca entre los números reales y los números naturales, *va a fracasar.* Cualquier lista que *presuma de tenerlos a todos* pecará por dejar alguno afuera. Y no hay manera de arreglarlo.[5]

Este método se conoce con el nombre de *método diagonal de Cantor*; fue uno de los saltos cualitativos más importantes de la historia, en términos de los conjuntos infinitos. A partir de ese momento, se supo entonces que había infinitos más grandes que otros.

La historia sigue y es muy profusa. Daría para escribir muchísimos libros sobre el tema (que de hecho están escritos). Pero sólo para dejarnos a todos con un sabor bien dulce en la boca, quiero proponerles pensar algunas cosas:

4. Para poder usar este argumento hay que saber que la *escritura decimal* de un número es *única*, pero se requeriría el uso de una herramienta un poco más sutil.

5. El número 0,0999999… y el número 0,1 son iguales. Es decir, para que dos números racionales sean iguales, no es necesario que lo sean dígito a dígito. Este problema se genera cada vez que uno "admite" que haya "infinitos" números *nueve* en el desarrollo decimal. Para que la "construcción" que hice del número que "no figura" en la lista sea *estrictamente correcta,* hay que *elegir un número que sea diferente de aII y de 9* en cada paso. Eso "evita", por ejemplo, que si uno tiene el número 0,1 en la lista, y empieza poniendo un 0 en el lugar a11 y luego elige *siempre* números 9, termina por construir el mismo número que figuraba en el primer lugar.

a) Supongamos que uno tiene un “dado” con *diez caras* y no seis, como los habituales. Cada cara tiene anotado un dígito, del 0 al 9. Supongamos que uno empieza a tirar el dado hacia arriba. Y va anotando el numerito que va saliendo. Empieza poniendo 0,… de manera que el resultado termine siendo un número real del intervalo [0,1]. Piensen lo siguiente: para que el resultado sea un número racional, el “dado” de diez caras tiene que empezar a repetirse a partir de un determinado momento, ya sea porque da siempre cero, o bien porque repite un *período*. En cualquier caso, si no repite o *no empieza a dar cero constantemente*, es porque dio un número irracional. Si repite o empieza a dar siempre *cero* es racional. ¿Qué les parece que es más posible que pase? De las dos alternativas, ¿cuál les parece más factible? Esto sirve para que intuitivamente advirtamos *cuántos más son los irracionales que los racionales*.

b) Si uno tuviera una recta, y pudiera *excluir los racionales,* no se notarían virtualmente los agujeros. En cambio, si excluyéramos a los irracionales, *casi* no se verían los puntos que quedan. Tanto más grande en tamaño es el conjunto de los reales comparado con el de los naturales. (La palabra *casi* está usada adrede, porque no es que *no se verían los racionales sino que la idea que quiero dar es que los irracionales son muchísimos más que los racionales*.)

c) Hay muchas preguntas para hacerse, pero la más inmediata es la siguiente: ¿es el conjunto de números reales el que tiene infinito más grande? La respuesta es no. Uno puede construirse conjuntos arbitrariamente grandes y con un cardinal infinito “más grande” que el anterior. Y este proceso no termina nunca.

d) Otra dirección de pregunta podría ser la siguiente: vimos recién que los reales *son más* que los naturales, pero ¿hay algún conjunto infinito que tenga cardinal más grande que el de los naturales y más chico que el de los reales? Este problema es un problema *abierto* de la matemática, pero se supone que no hay conjuntos infinitos *en el medio*. Sin embargo, *la hipótesis del continuo* dice que la matemática seguirá siendo consistente, se pruebe que hay o no hay conjuntos con infinitos más grandes que el de los naturales y más chicos que el de los reales.

Segmentos de distinta longitud

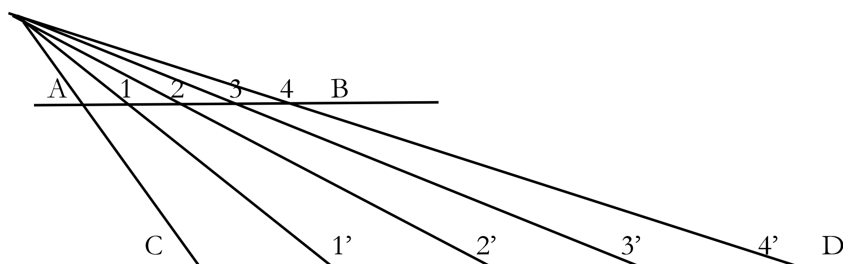
Como hemos visto reiteradamente en este libro, todo lo que tenga que ver con los conjuntos infinitos es ciertamente fascinante. La intuición es puesta a prueba y los sentidos también. La famosa frase de Cantor (“lo veo, pero no lo creo”) caracteriza bien lo que nos ocurre cuando tropezamos con ellos (los conjuntos infinitos) las primeras veces.

Otro ejemplo muy ilustrativo es el de los segmentos.

Tomemos dos segmentos de *distinta longitud*. Llamémolos [A,B] y [C,D]. Uno *sabe (¿sabe?)* que todo segmento tiene infinitos puntos. Si necesitan una confirmación, marquen el punto medio del segmento. Ahora tienen dos segmentos iguales. Tomen cualquiera de ellos, marquen el punto medio y continúen con el proceso. Como advierten, *siempre* hay un punto en el medio de dos y, por lo tanto, el número de puntos que contiene un segmento es *siempre infinito*.[6]

Lo interesante es preguntarse, ¿cómo se comparan los infinitos? Es decir, ¿quién tiene más puntos si dos segmentos tienen distintas longitudes como [A,B] y [C,D]? La respuesta es sorprendente también y es que *ambos tienen el mismo número de puntos. Infinitos, ciertamente, pero el mismo número.* ¿Cómo convencerse de esto?

Como ya hemos visto en el capítulo de los distintos tipos de infinitos, es imposible tratar de *contar*. Necesitamos otros métodos de comparación. Y la herramienta que usé en otras partes, es la de las "asignaciones" o "flechitas" que unen los elementos de uno con los elementos de otro (recuerden el apareamiento de números naturales con los enteros, o con los racionales, etcétera). En este caso, entonces, hago lo mismo.[7]



Este hecho, naturalmente, atenta contra la intuición, porque se desprende que un segmento que una la parte externa de la página que ustedes están leyendo con la parte interna, tiene *la misma cantidad de puntos que un segmento que una la Ciudad de Buenos Aires con la de Tucumán.* O un segmento que una la Tierra con la Luna.

6. Este argumento ya lo utilicé en el capítulo sobre los diferentes infinitos de Cantor.

7. Excluyo los segmentos que contienen un solo punto, lo que podríamos llamar un *segmento degenerado* [A,A]. Este segmento contiene *un solo punto: A*.

Un punto en un segmento

Les propongo el siguiente ejercicio para comprobar su familiaridad con los *grandes números*.

1) Tomen una hoja y algo con qué escribir.

2) Tracen un segmento (háganlo grande, no ahorren papel justo ahora, aunque el ejemplo funciona igual).

3) Pongan el número *cero* en el extremo izquierdo de su segmento.

4) Pongan el número un billón en el extremo derecho. Es decir, ustedes van a suponer que el segmento que dibujaron mide un billón. Marquen en el mismo segmento el número mil millones. ¿Dónde lo pondrían?

La respuesta, en las páginas de soluciones.

El método axiomático

Cesar A. Trejo

1. Sistemas deductivos y axiomas

1.1 Una teoría científica no es un simple catálogo o lista de proposiciones. El conocimiento científico se alcanza sólo cuando nuestras proposiciones se estructuran de modo sistemático, de suerte que podamos advertir sus mutuas relaciones.

Ahora bien, ¿qué relaciones mutuas importa percibir?; ¿cómo se estructuran las proposiciones en una disciplina científica? En una ciencia, algunas proposiciones se pueden deducir o demostrar a partir de otras: por ejemplo, tanto las leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas como las de Galileo sobre la caída de los graves, pueden deducirse de las leyes generales de la Dinámica y la ley de gravitación de Newton; la relación mutua entre estas leyes es una parte de la ciencia física.

Una disciplina matemática (y también la Lógica) se estructura en un conjunto de proposiciones llamadas teoremas, cada uno de los cuales se deduce de otros anteriores (de allí el nombre de sistema deductivo aplicado a una teoría matemática), utilizando ciertas reglas llamadas reglas de la Lógica.

Puesto que para demostrar una proposición o teorema hay que partir de otras proposiciones ya establecidas, siempre hemos de partir de unas proposiciones primeras que deben aceptarse sin demostración. No es que exista en una teoría matemática alguna proposición que no pueda demostrarse a partir de otras, sino que no pueden demostrarse TODAS ELLAS a la vez, pues por fuerza ha de partirse de algunas (que acaso puedan elegirse de varias maneras posibles). De igual modo, los teoremas de la teoría enuncian propiedades de ciertos objetos o entes ideales, algunos de los cuales podrán definirse (1. 2) mediante otros, pero también es forzoso partir de ciertos conceptos primitivos u objetos primitivos no susceptibles de definición, y designados por ciertas palabras o signos primitivos como 'proposición', 'punto', 'recta', 'núme-

ro', etc. Entre los conceptos primitivos puede haber predicados o atributos de relaciones y operaciones primitivas, que se indicarán por signos o expresiones primitivas tales como: Î pertenece a; Ì , incluido en; ' , no; Ú, o; Ù, y ; etcétera.

Los conceptos primitivos y las proposiciones primitivas se reúnen en un sistema de axiomas o postulados (ambas palabras significan lo mismo) que definen el sistema deductivo, y constituyen a la vez la base sobre la cual se demuestran los teoremas y se elaboran los conceptos no primitivos de la teoría.

1.2 En el desarrollo de una teoría deductiva se presentan ciertas proposiciones tales como ésta:

Diremos que los puntos A, B, C están alineados si (y sólo si) existe una recta a la cual pertenecen todos ellos.

Estas proposiciones no se demuestran ni tendría sentido intentarlo, pues no expresan hechos ni contienen nada por demostrar, simplemente asignan un significado a una palabra, expresión o símbolo nuevos. Se llaman definiciones e importa mucho (lo mismo en la enseñanza) distinguirlas claramente de las demás. Estas y otras definiciones basadas en principios más elaborados se estudian en el § 11: conceptuación matemática.

2. Un ejemplo de sistema deductivo

2. 1 Para concretar las consideraciones generales anteriores demos un ejemplo de un sistema deductivo muy sencillo.

Consideraremos ciertos objetos que llamaremos 'puntos' y otros que llamaremos 'rectas', sin que los nombres que usamos nada impliquen sobre la naturaleza a significado de estos objetos, lo que, por otra parte, no interesa para la construcción de la teoría deductiva. Indicaremos los puntos por letras mayúsculas y las rectas por minúsculas.

Entre estos objetos primitivos introduciremos una relación primitiva: dados un punto 0 y una recta r, puede ocurrir que estén en una 'cierta relación' entre sí, llamada 'de incidencia' y que se expresa por uno cualquiera de los enunciados

El punto P es incidente con la recta r , (1)

La recta r es incidente con el punto P, (2)

que supondremos equivalentes (es decir, la relación de incidencia es simétrica).

Resumiendo, tenemos tres conceptos primitivos:

punto, recta, incidencia. (3)

2.2 De los conceptos primitivos (3), lo único que interesa a la teoría abstracta es que cumplan las dos condiciones siguientes:

Axioma 1. Dados dos puntos diferentes, existe una y solo una recta incidente con ambos.

Axioma 2. Dadas dos rectas diferentes, existe al menos un punto incidente con ambas.

2. 3 Con lo dicho en 2. 1 y 2. 2 tenemos ya definido un sistema deductivo. Demos ahora un ejemplo de un teorema del mismo, aunque debemos advertir que lo que titularemos demostración no constituye una formalización de acuerdo con las reglas de la Lógica que recién veremos en el § 7.

Teorema. Dadas dos rectas diferentes, no existe más de un punto incidente con ambas.

Demostración

Supongamos que hubiera más de un punto incidente con ambas rectas. En tal caso podríamos elegir de entre ellos dos diferentes. Como por el axioma 1 hay sólo una recta incidente con esos dos puntos, las rectas dadas deberían coincidir o ser la misma, contra lo afirmado en la hipótesis del teorema. Luego la suposición que hemos hecho es falsa, es decir, no hay más de un punto incidente con ambas rectas, y el teorema queda demostrado.

3. Modelos e interpretaciones

3.1 En algunas teorías deductivas, como por ejemplo en una exposición axiomática de la Geometría elemental, el sistema axiomático se construye a partir de un modelo preexistente en forma de una teoría ya 'conocida' en un sentido general intuitivo, que guía la elección de los conceptos primitivos y de los axiomas. Es muy deseable que tanto éstos como aquéllos tengan un fuerte y claro contenido intuitivo. En el lenguaje común suele entenderse por 'axiomático' lo que es muy evidente; pero debemos cuidarnos de creer que los axiomas son tales porque su grado de evidencia nos exime de demostrarlos. Son simplemente proposiciones primeras que se adoptan convencionalmente como punto de partida para la construcción de la teoría.

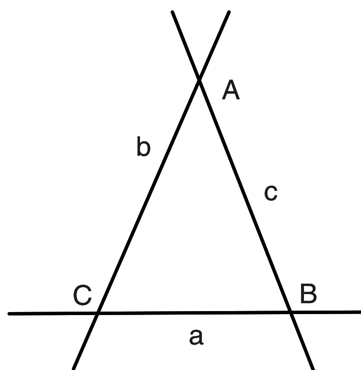
Hasta la excesiva familiaridad con el material que ha de integrar o motivar una teoría deductiva puede conducir a errores en el desarrollo de ésta. En efecto, si una cadena de razonamientos incluye nociones familiares, existe el peligro de admitir o usar en forma inadvertida más que lo explícitamente formulado en los axiomas o bien ya demostrado. Un error de esta naturaleza se presenta en la primera demostración de los Elementos de Euclides.

3.2 En teorías matemáticas menos elementales, la exposición axiomática no siempre se propone formalizar una teoría ya conocida en el sentido general intuitivo arriba señalado. En tales casos suele ser muy conveniente e ilustrativo obtener un conjunto de objetos que se llamará un modelo del sistema deductivo, en el cual dando un significado (mediante definiciones auxiliares llamadas correlativas) a los conceptos y relaciones primitivos a que se refieren los axiomas, resultan verificados todos ellos. En tal caso se dice que se tiene una interpretación o una aplicación de la teoría matemática abstracta. El significado que dan las definiciones correlativas puede referirse a conceptos de otra teoría abstracta, o sobre el mundo físico, pero siempre en forma tal que las relaciones expresadas por los axiomas sean verificadas por el criterio de certeza (lógico, intuitivo, descriptivo, etc.) usual en el dominio en el cual se ha de aplicar la teoría.

Por lo contrario, el sistema deductivo en sí, o sea una rama de la Matemática pura, debe considerarse como un 'molde lógico' vacío de toda 'interpretación o aplicación' y sin referencia a ningún modelo particular.

3. 3 Veamos ahora tres modelos del sistema deductivo visto en 2.

Modelo 1. Demos a los conceptos primitivos (3) el significado habitual en la Geometría elemental, pero consideremos como puntos y rectas solamente los vértices y los lados de un triángulo (fig. 22). Se verifican los axiomas 1 y 2, y por consiguiente se tiene una interpretación del sistema abstracto, sobre un modelo finito.



Modelo 2. Llamemos 'puntos' a tres objetos cualesquiera A, B, C, y 'rectas' a otros tres objetos cualesquiera a, b, e, y convengamos en que un punto y una recta son 'incidentes' si y sólo si existe una marca x en la casilla correspondiente de esta tabla de doble entrada que llamaremos matriz de incidencia:

		b	c
A		x	x
B	x		x
C	x	x	

Se cumple el axioma 1, pues dos filas cualesquiera tienen un par de marcas y sólo uno en una misma columna. Se cumple el axioma 2, pues dos columnas cualesquiera tienen al menos un par de marcas en una misma fila. En virtud del teorema demostrado en 2. 3, dos columnas no pueden tener dos pares de marcas en dos filas.

Modelo 3.3. Dando a los conceptos primitivos (3) el significado habitual, en el plano proyectivo se verifican los axiomas 1 y 2, de modo que se tiene otra interpretación de la teoría abstracta. En este sentido el sistema deductivo formaliza una parte de la Geometría plana proyectiva.

4. Consistencia

4.1 Los axiomas de un sistema deductivo deben cumplir la siguiente condición, llamada de consistencia o de no contradicción:

De los axiomas no deben poder deducirse una proposición p y su negación p'.

Si un sistema deductivo no es consistente, o, como también se dice, es contradictorio, 'al ser deducibles en él una proposición p y también su negación p'', es teorema la proposición

$$p \wedge p' \qquad (4)$$

Pero esta proposición p ∧ p' es falsa, cualquiera sea p. Por consiguiente, cualquiera sea la proposición q es verdadera la implicación

$$(p \wedge p') \text{Þ } q, \qquad (5)$$

por ser falso el antecedente (ver cap. I - 3. 12). En consecuencia, por ser teorema de la teoría p ∧ p', lo es también q. En otras palabras:

En un sistema contradictorio, toda proposición es teorema.

En virtud de este carácter trivial de los sistemas contradictorios o no consistentes, al considerar un sistema deductivo lo supondremos consistente.

Otra manera de formular la conclusión anterior es el llamado criterio de consistencia de E. L. Post:

Un sistema deductivo es consistente si y sólo si contiene (es decir, puede expresarse en él) una proposición que no es demostrable en él como teorema.

Ahora bien, dado un sistema de axiomas ¿cómo puede establecerse su consistencia? Por más teoremas que hayamos probado sin llegar a una contradicción, por este camino nunca estaremos seguros de no tropezar con una más adelante.

Por ahora señalaremos dos maneras de probar la consistencia de una teoría matemática, mediante modelos.

4.2 Modelos finitos. En algunos sistemas deductivos la consistencia puede probarse construyendo un modelo que consista en un número finito de objetos, cada uno de los cuales se exhibe explícitamente y se designa por un símbolo, como hicimos en el modelo 2 de 3. 3. La comprobación de que se cumplen los axiomas se hace por un número finito de pasos o verificaciones como las señaladas a propósito de la matriz de incidencia de 3. 3.

4.3 Consistencia relativa. Para probar la consistencia de una teoría abstracta puede también darse de ella una interpretación en el marco de otra teoría matemática. Así, por ejemplo, mediante la interpretación aritmética de la Geometría elemental dada por la Geometría analítica, se prueba la consistencia de la Geometría a partir de la consistencia de la teoría del número real (o sea del Análisis), y a su vez se demuestra que ésta resulta si se admite la consistencia de la teoría del número natural, construida por ejemplo a partir de los axiomas de Peano como veremos en § 10.

Con esta reducción vemos que toda contradicción en la Geometría elemental mostraría la existencia de una contradicción en la Aritmética. El problema queda reducido al de probar la consistencia de la Aritmética, pero aún no lograda esta demostración, la reducción importa un apreciable avance

epistemológico debido a que la noción de número es más básica que los conceptos geométricos.

5. Independencia

5.1 Si uno de los axiomas de una teoría pudiera deducirse de los demás, conviene eliminarlo del sistema de axiomas, pues de todos modos entra en la teoría como teorema, y el sistema de axiomas se simplifica. Por eso es importante (aunque no sea necesario desde el punto de vista lógico) que los axiomas sean independientes, o sea que ninguno de ellos pueda deducirse a partir de los demás.

La independencia de un axioma respecto de los demás de un sistema compatible, queda demostrada si se prueba que su negación es compatible con ellos, y así el problema de la independencia se reduce al de consistencia (ver 4).

5. 2 El ejemplo más notable de la importancia de este concepto de independencia lo proporciona el axioma de las paralelas o quinto postulado de Euclides. Durante más de veinte siglos los matemáticos sospecharon que podría demostrarse a partir de los demás postulados y se esforzaron por lograr una tal demostración, hasta que en el siglo XIX K. F. Gauss, N. I. Lobatchewski y J. Bolyai iniciaron el camino para probar su independencia con la construcción de las geometrías no euclidianas, que contienen los mismos axiomas con excepción del de las paralelas. Lobatchewski lo reemplaza por otro contradictorio con él, y Bolyai estudia las propiedades geométricas independientes del postulado de Euclides, a las que llama propiedades absolutas; es estudio de estas propiedades es el objeto de la llamada Geometría absoluta.

Pero la demostración de independencia solo fue lograda más tarde, primero por E. Beltrami en 1868 y tres años después por F. Klein, quien usando métodos de la Geometría proyectiva construyó modelos euclidianos de las geometrías no euclidianas, probando así que si éstas no fueran consistentes no lo sería tampoco la geometría euclidiana. No trataremos estos temas, pero daremos información bibliográfica en nota IV-2 de este capítulo.

6. Plenitud

6.1 La palabra plenitud (o completidad) se usa en varios sentidos con referencia a sistemas deductivos. Con frecuencia el sistema deductivo se construye con miras a un modelo particular (ver 3. 1), y una vez construido cabe preguntar si es o no apto para expresar toda proposición referente a ese mo-

delo. En caso afirmativo se dice que el sistema deductivo en cuestión es expresivamente completo respecto de ese modelo. Más precisamente:

Definición

Un sistema deductivo es expresivamente completo respecto de un modelo dado, si asignando a sus términos primitivos una interpretación adecuada, toda proposición sobre el modelo puede expresarse mediante una fórmula del sistema deductivo.

6.2 En la definición anterior no se distingue entre proposiciones verdaderas y falsas. Esta distinción corresponde al concepto de plenitud (o completidad) deductiva:

Definición

Un sistema deductivo es deductivamente completo respecto de un modelo dado, si asignando a sus términos primitivos una interpretación adecuada, toda proposición verdadera sobre el modelo corresponde a un teorema del sistema deductivo.

6. 3 Sobre esta definición cabe hacer dos importantes observaciones:

(i) Todo sistema contradictorio resulta deductivamente completo, pues en él toda proposición es teorema (ver 4. 1). Por ello restringiremos la definición anterior a los sistemas consistentes.

(ii) La definición de 6.2 es todavía muy imprecisa, pues no se especifica cuál es el criterio de verdad, ajeno al sistema deductivo, en base al cual las proposiciones sobre el modelo se clasifican en verdaderas y falsas. Una definición de completidad deductiva de un sistema, sin referencia a modelo alguno, resulta así:
Toda fórmula del sistema deductivo (es decir toda fórmula bien formada expresable con los símbolos primitivos del sistema y los de la Lógica) pertenece a uno al menos de estos tres conjuntos:

(a) las deducibles en el sistema (teoremas);

(b) aquellas cuya negación es deducible;

(e) todas las demás.

Si y sólo si el sistema es consistente, los conjuntos (a) y (b) son disjuntos y el conjunto (e) puede no ser vacío; si además (c) es vacío, el sistema se llama deductivamente completo.

¿Puede pensar una máquina?

A. M. Turing

Proverbio
Ten cuidado cuando el gran Dios deja suelto
un pensador sobre este planeta.

Emerson

Porque es un deporte coger a la tropa de ingenieros
con sus propias bombas...

Shakespeare *(Hamlet)*

1. El juego de imitación

Propongo que consideremos la siguiente pregunta: "¿Pueden pensar las máquinas?" Ésta debería ir precedida de definiciones sobre el significado de los términos "máquina" y "pensar". Deberíamos escoger las definiciones de modo que reflejaran en lo posible el uso normal de las palabras, pero esta actitud es peligrosa. Si hemos de encontrar el significado de las palabras "máquina" y "pensar" examinando cómo se usan habitualmente, es difícil escapar a la conclusión de que el significado y la respuesta a la pregunta: "¿Pueden pensar las máquinas?", se han de buscar mediante un equipo de estadística como el Gallup. Pero esto es absurdo. En vez de buscar una definición de este tipo voy a reemplazar la pregunta por otra, que está muy relacionada con ella, y se expresa con palabras relativamente poco ambiguas.

Podemos describir la nueva forma de presentar el problema en función de un juego que llamaremos el "juego de imitación". Intervienen en él tres personas, un hombre (A), una mujer (B) y un interrogador (C) que puede ser de cualquiera de los dos sexos. El interrogador permanece en una habitación, separado de los otros dos. El objeto del juego para el interrogador es determinar cuál de los otros dos es el hombre y cuál es la mujer. Los distingue mediante las letras X e Y, y al final del juego dice "X es A e Y es B" o "X es B e Y es A". El interrogador puede formular a A y B preguntas de este tipo:

C: ¿Podría decirme, X, la longitud de su pelo?

Supongamos que X es *A*, luego *A* ha de contestar. *A* trata de conseguir que *C* se equivoque al identificarla. Su respuesta por lo tanto ha de ser:

"Mi pelo está rapado y los más largos tienen unos 20 cm".

Para que el tono de la voz no ayude al interrogador, las respuestas deberían ser escritas, o mejor, escritas a máquina. La disposición ideal es un teletipo que comunique las dos habitaciones. Las preguntas y]as respuestas pueden ser repetidas alternativamente por un intermediario. El objeto del juego para el tercer jugador *(B)* es ayudar al interrogador. La mejor estrategia para ello es probablemente dar respuestas verdaderas. Puede añadir a sus preguntas respuestas como "Yo soy la mujer, ¡No le haga caso!", pero no asegurarán nada puesto que el hombre puede decir cosas similares.

Preguntamos ahora, "¿Qué sucederá cuando una máquina se encargue del papel de *A* en este juego?". ¿Se equivocará el interrogador tan a menudo cuando el juego es así, como cuando intervienen un hombre y una mujer? Estas preguntas sustituyen a nuestro anterior". ¿Pueden pensar las máquinas?".

2. Crítica del nuevo problema

Tanto como "¿Cuál es la respuesta a esta nueva forma de la pregunta?" podemos preguntarnos, "¿Vale la pena investigarla?". Vamos a investigar sin más esta última pregunta, cortando una serie infinita de regresiones.

El nuevo problema tiene la ventaja de dibujar una línea separadora entre la capacidad física y la capacidad intelectual de un hombre. Ningún químico o ingeniero pretende ser capaz de producir un material que no se pueda distinguir de la piel humana. Es posible que esto pueda hacerse en alguna época, pero incluso suponiendo posible este invento tendríamos la impresión de que nos importa poco tratar de hacer más humana una "máquina pensante" construyéndola con esta carne artificial. La forma de plantear el problema refleja este hecho en la condición que impide al interrogador ver o tocar a los otros contrincantes, u oír sus voces. Otras ventajas del criterio propuesto pueden verse con un ejemplo de preguntas y contestaciones:

P: Escríbame por favor un soneto sobre el Forth Bridge.
C: No cuente conmigo. Nunca he podido escribir una poesía.
P: Sume.
C: (Pausa de 30 segundos y entonces da la respuesta).
P: ¿Juega al ajedrez?
C: Sí.

P: Tengo R en mi Rl, y ninguna otra pieza. Usted tiene solamente R en R6 y T en TI. Juega usted. ¿Qué hará?

C: (Después de una pausa de 15 segundos) T-T8 mate.

El método de pregunta y respuesta parece adecuado para introducir casi todos los campos de actividad humana que deseemos. No queremos penalizar a la máquina por su falta de habilidad para relucir en un concurso de belleza, ni penalizar al hombre por perder en una carrera contra un aeroplano. Las condiciones de nuestro juego hacen que estos fallos no tengan importancia. Los "testigos" pueden jactarse todo lo que quieran, si les parece útil, sobre sus encantos, fuerza o heroísmo, pero el interrogador no puede pedir demostraciones prácticas.

Podemos criticar quizás el juego en el sentido de que las desventajas pesan demasiado contra la máquina. Si el hombre intentara y pretendiera ser una máquina daría claramente un espectáculo muy pobre. Se le eliminaría inmediatamente por lentitud y falta de precisión en aritmética. ¿No pueden las máquinas realizar algo que debería describirse como pensamiento, pero que es muy diferente de lo que hace el hombre? Esta objeción es muy importante, pero sin embargo, al menos podemos decir que si puede construirse una máquina que juegue el juego de imitación satisfactoriamente, no nos ha de preocupar esta objeción.

Se nos puede aconsejar que la mejor estrategia para la máquina en el "juego de imitación" puede ser posiblemente distinta de la imitación de la conducta de un hombre. Quizá sí, pero pienso que no es probable que se dé un efecto importante de este tipo. En todo caso no tratamos de investigar ahora la teoría del juego, y supondremos que la mejor estrategia es intentar dar las respuestas que daría naturalmente un hombre.

3. Las máquinas implicadas en el juego

La pregunta planteada en 1 no será del todo diferente hasta que no hayamos especificado qué queremos decir con la palabra "máquina". Es natural que intentemos permitir el uso de toda clase de ingeniería técnica en nuestras máquinas. Queremos aceptar también la posibilidad de que un ingeniero o un equipo de ingenieros pueda construir una máquina que dé resultado, pero cuyo proceso operativo no pueda ser descrito por sus constructores porque han aplicado un método que sea en gran parte experimental. Finalmente, deseamos excluir de las máquinas los hombres nacidos de la manera habitual. Es difícil construir las definiciones de modo que satisfagan estas tres condiciones.

Uno insistiría por ejemplo en que el equipo de ingenieros fuera todo del mismo sexo, pero esto no sería realmente satisfactorio, porque probablemente se puede construir un individuo completo a partir de una sola célula de la piel, por ejemplo, de un hombre. Hacer esto sería un logro de la técnica biológica que merecería las más altas alabanzas, pero no nos sentiríamos inclinados a considerarlo como un caso de "construcción de una máquina pensante". Esto nos induce a abandonar la condición de que se permita todo tipo de técnica. Estamos muy dispuestos a esto en vista de que el presente interés en las "máquinas pensantes" ha sido provocado por un tipo particular de máquina, llamada normalmente "calculadora electrónica" o "calculadora digital". Siguiendo esta sugerencia solamente permitimos calculadoras digitales en nuestro juego.

A primera vista esta restricción parece importante. Voy a intentar hacer ver que en realidad no es así. Para ello se necesita un corto resumen de la naturaleza y propiedades de estas calculadoras.

Se nos puede decir también que esta identificación de las máquinas con calculadoras digitales, del mismo modo que nuestro criterio para "pensar" solamente dejará de ser satisfactorio si (al revés de lo que creo) resulta que las calculadoras digitales son incapaces de hacer un buen papel en el juego.

Existe ya un cierto número de calculadoras digitales que pueden funcionar, y se nos podría preguntar, "¿por qué no empezar de una vez el experimento? Sería fácil satisfacer las condiciones del juego. Podría usarse una cantidad dada de interrogadores, y reunir las estadísticas que mostrarían el porcentaje de identificaciones acertadas". La respuesta más breve es que no nos estamos preguntando si todas las calculadoras digitales darían buen resultado ni si los calculadores disponibles en este momento lo harían, sino si hay calculadoras imaginarias que tendrían éxito. Pero ésta es sólo la respuesta más corta. Más tarde veremos la cuestión bajo una luz diferente.

4. Calculadoras digitales

Podemos explicar la idea subyacente a las calculadoras digitales diciendo que con estas máquinas se trata de hacer operaciones que podrían realizarse mediante un calculador humano. Se supone que el calculador humano sigue unas reglas fijas; no tiene autoridad para desviarse en ningún detalle de ellas. Podernos suponer que un libro proporciona estas reglas, y que este libro se cambia cada vez que empieza un nuevo trabajo. Puede hacer también sus multiplicaciones y sumas en una "máquina de escritorio", pero esto no es importante.

Si usamos la explicación anterior como una definición corremos el peligro de hacer una petición de principio. Esto lo evitamos dando un esquema de los medios con que se logra el efecto deseado. Una calculadora digital puede considerarse compuesta normalmente de estas tres partes:

(I) Almacén
(II) Unidad ejecutiva
(III) Control

El almacén es un depósito de información, y corresponde al papel del calculador humano, tanto si éste es el papel sobre el cual hace sus cálculos o el papel sobre el cual está impreso su libro de reglas. En tanto en cuanto el calculador humano hace cálculos con su cabeza una parte del almacén corresponderá a su memoria.

La unidad ejecutiva es la parte que realiza las diversas operaciones individuales implicadas en un cálculo. El tipo de estas operaciones individuales variará de una máquina a otra. Normalmente pueden hacerse operaciones de gran longitud como “Multiplica 3540675445 por 7076345687”, pero en algunas máquinas sólo son posibles operaciones muy simples como “Apunta 0”.

Hemos indicado que el “libro de reglas” que se proporciona al calculador viene reemplazado en la máquina por una parte del almacén. Se llama entonces “tabla de instrucciones”. La obligación del control consiste en ver si estas instrucciones son obedecidas correctamente y en el orden adecuado. El control está construido de tal manera que esto ha de suceder por necesidad.

Se divide la información en el almacén normalmente en paquetes de un tamaño moderadamente pequeño. Por ejemplo, en una máquina un paquete puede consistir en diez dígitos decimales. Se asignan números a las partes del almacén donde están los diversos paquetes de información, de alguna manera sistemática. Una instrucción típica puede decir:

“Suma el número situado en la posición 6809 al de la 4302 e introduce el resultado en esta última posición del almacén”.

No hay que decir que en la máquina esto no estaría expresado en castellano. Estaría codificado más probablemente en una forma tal como 6809430217. El 17 indica aquí cuál de las diversas operaciones posibles se ha de hacer sobre los dos números. En este caso la operación es la descrita anteriormente: “Suma el número...” Hay que tener en cuenta que la instrucción toma 10 dígitos y por lo tanto forma convenientemente un paquete de información. El control habitualmente hará que se obedezcan las instrucciones en el orden de las posiciones en que han sido depositadas, pero en ciertos casos se pueden presentar instrucciones tales como: “Ahora obedece la instrucción situa-

da en la posición 5606, y continúa a partir de aquí", o también: "Si la posición 4505 contiene 0 obedece a continuación la instrucción depositada en 6707, si no continúa adelante". Instrucciones de estos últimos tipos son muy importantes porque permiten repetir una y otra vez toda una serie de operaciones hasta que se cumpla alguna condición, y sin embargo obedeciendo al hacerlo no a nuevas instrucciones en cada repetición, sino una y otra vez las mismas. Tomemos una analogía doméstica. Supongamos que mamá quiere que Tommy pase por el zapatero cada día en su camino hacia la escuela para ver si sus zapatos están a punto. Para ello puede decírselo de nuevo cada mañana. Puede también clavar en el recibidor un aviso una vez por todas de tal modo que lo vea cada vez que marche a la escuela diciéndole que pase a por los zapatos, y también que rompa el aviso cuando vuelva con los zapatos.

El lector ha de aceptar como un hecho que pueden construirse calculadoras digitales, y que realmente se han construido, de acuerdo con los principios que hemos descrito, y que pueden imitar de una manera muy precisa las acciones de un calculador humano.

El libro de reglas que hemos dado a nuestro calculador humano es, por supuesto, una ficción apropiada. De hecho los calculadores humanos recuerdan realmente lo que han de hacer. Si se quiere que una máquina imite la conducta de un calculador humano en algunas operaciones complejas, se le ha de preguntar cómo lo ha hecho, y entonces trasladar la respuesta en forma de tabla de instrucciones. La construcción de tablas de instrucciones se denota normalmente por "programación". "Programar una máquina para que realice la operación *A*" significa poner en la máquina la tabala adecuada de instrucciones de modo que haga *A*.

Una variante interesante sobre la idea de una calculadora digital es una "calculadora digital con un elemento de azar". Estas calculadoras tienen instrucciones que implican lanzar un dado o algún proceso electrónico equivalente; una instrucción de este tipo tendría que ser por ejemplo: "Tira el dado y pon el número resultante en la posición 1.000". A veces se dice de esta máquina que tiene libre albedrío (aunque yo no usaría esta frase). Normalmente no es posible determinar, a partir de la observación, si una máquina tiene un elemento de azar, puesto que se puede producir un efecto similar mediante dispositivos como que la elección en los dígitos dependa del decimal de p.

La mayoría de las calculadoras digitales actuales tienen solamente un almacén finito. No hay ninguna dificultad teórica en la idea de una calculadora con un almacén ilimitado. Por supuesto en un momento dado sólo se puede usar una parte finita. De igual manera sólo se puede haber construido una cantidad finita, pero podemos imaginar que vamos añadiendo más a medida que lo

necesitamos. Estas calculadoras tienen un especial interés teórico y las llamaremos calculadoras de capacidad infinita.

La idea de una calculadora digital es antigua. Charles Babbage, catedrático lucasiano de Matemáticas en Cambridge de 1828 a 1839, planeó una máquina de este tipo, llamada máquina analítica, y que nunca completó. Aunque Babbage poseía todas las ideas esenciales, su máquina no tenía en aquel tiempo una perspectiva muy atractiva. La velocidad que se hubiera podido obtener habría sido mayor que la de un calculador humano pero, en definitiva, unas cien veces menor que la de la máquina de Manchester, que es una de las más lentas máquinas modernas. El almacenamiento tenía que ser puramente mecánico, usando solamente ruedas y tarjetas.

El hecho de que la máquina analítica de Babbage debiera ser enteramente mecánica nos ayudará a librarnos de una superstición. Se da importancia frecuentemente al hecho de que las calculadoras digitales modernas son eléctricas, y que el sistema nervioso también es eléctrico. Como la máquina de Babbage no era eléctrica y como en cierto sentido todas las calculadoras digitales son equivalentes, vemos que este uso de la electricidad no puede ser de importancia teórica. Por supuesto, aparece la electricidad cuando se necesita una señal rápida; por lo tanto, no es sorprendente que la encontremos en estos casos. En el sistema nervioso los fenómenos químicos son al menos tan importantes como los eléctricos. En algunas calculadoras el sistema de almacenamiento es principalmente acústico. Vemos pues que el hecho de usar electricidad es una similitud muy superficial. Si queremos encontrar semejanzas de este tipo tendríamos que buscar más bien analogías matemáticas de funcionamiento.

Decidir...

¿qué variables considerar?

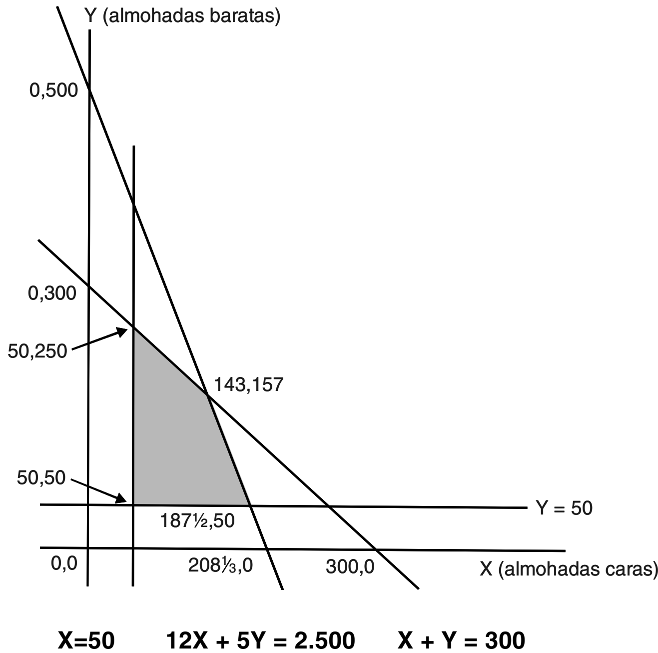
Programación lineal

John Allen Paulos

La programación lineal es un método para maximizar (o minimizar) una cierta cantidad asegurando al mismo tiempo que se cumplen ciertas condiciones sobre otras cantidades. Generalmente estas condiciones son lineales (sus gráficas son líneas rectas), de ahí el nombre de la disciplina: programación lineal. Es una de las técnicas más útiles de la investigación operacional, que es como se conoce el conjunto de instrumentos matemáticos desarrollados después de la segunda guerra mundial para mejorar el rendimiento de los sistemas económicos, industriales y militares, y desde entonces se ha convertido en un ingrediente habitual de los cursos de matemáticas de las escuelas de empresariales.

En vez de seguir invocando inexpresivos términos matemáticos para aclarar su significado, lo ilustraremos reflexionando sobre un simple cálculo del punto muerto. Un pequeño taller fabrica sillas metálicas (o artefactos si prefiere las formulaciones genéricas). Sus costes son 80.000 ptas. (en bienes de equipo, por ejemplo) y 3.000 ptas. por cada silla producida. Así pues, el coste total T contraído por el taller viene dado por la fórmula T = 3.000X + 80.000, donde X es el número de sillas producidas. Si suponemos además que el precio de venta de estas sillas es de 5.000 ptas. la pieza, los ingresos totales R del taller vienen dados por la ecuación R = 5 000 X, donde X es el número de sillas vendidas.

Representando ambas ecuaciones sobre el mismo par de ejes coordenados, encontramos que se cortan en un punto en el cual los costes y los ingresos son iguales. El punto muerto, o de beneficio cero, es el (40, 200.000 ptas.), de modo que si se venden menos de 40 sillas, los costes superan los ingresos; si se venden más, los ingresos superan los costes: y si se venden exactamente 40 sillas, tanto los ingresos como los costes son 200 000 ptas. Maximizar los beneficios en este caso se reduce a vender tantas sillas como sea posible. (Para obtener algebraicamente el punto de beneficio cero, 40, se resta la ecuación Y =3.000 X + 80. 000 de la Y = 5.000X. La ecuación resultante, 0 = 2.000 X – 80.000, se resuelve fácilmente y da X = 40).



La región sombreada satisface todas las desigualdades

Después de este preliminar consideremos el siguiente problema, que es un caso auténtico de programación lineal. Sin dejar las aplicaciones de la economía, supondremos que una empresa fabrica dos tipos de almohadas, Producir una almohada cara cuesta 1.200 ptas. y se vende a 3.000 ptas., mientras que una barata cuesta 500 ptas. y se vende a 1.800 ptas. La compañía no puede fabricar más de 300 almohadas al mes y no puede gastar más de 250 000 ptas. al mes en su producción (son normas impuestas por la subvención).* Si la compañía ha de fabricar al menos 50 almohadas de cada tipo ¿cuántas ha de fabricar de cada clase para maximizar sus beneficios?

Si llamamos X al número de almohadas caras que la compañía fabrica cada mes e Y al de almohadas caras, podemos convertir las condiciones sobre X e Y del problema en: $X + Y \leq 300$; $X \geq 50$; $Y \geq 50$; y $1.200\ X + 500\ Y \leq 250.000$. La última desigualdad se debe a que si fabricar una almohada cara cuesta 1 200 ptas., producir X costará 1.200X ptas.; y análogamente, hacer Y almohadas baratas costará 500 Y ptas. Obsérvese que estas condiciones se

* Chiste intraducible: *leatherbed*, "subvención excesiva", pero también "plumón". (N. del T.)

expresan como desigualdades lineales, cuyas gráficas son regiones del plano delimitadas por líneas rectas (o, en problemas más complicados, por sus análogos en espacios de más dimensiones).

La cantidad que hay que maximizar es el beneficio, que en términos de X e Y vale P = 1.800X + 1.300Y. Esto es así porque el beneficio que se tiene por cada almohada cara es de 1.800 ptas. (3.000 ptas. – 1.200 ptas.), y por cada almohada barata 1.300 ptas. (1.800 ptas. – 500 ptas.), con lo que X de las primeras dan un beneficio de 1.800X ptas., e Y de las segundas dan 1.300Y ptas. Una vez tenemos el problema planteado así, hay varias técnicas para hallar la solución. Una es gráfica y consiste en encontrar los vértices y los lados de la región permitida –la parte del plano en la que son válidas todas las desigualdades– y luego probarlas para encontrar en cuál de ellas se tiene el máximo beneficio. Con este método, y un poco de geometría analítica, descubrimos que la compañía de almohadas debería fabricar 143 almohadas caras y 157 baratas al mes si quiere obtener el máximo beneficio.

Otra técnica, llamada método símplex, debida al matemático norteamericano George Danzig, desarrolla y formaliza esta estrategia geométrica de modo que un ordenador pueda examinar rápidamente estos puntos en el caso de que haya más de dos variables. Usado durante más de cuarenta años, el método simplex ha ahorrado una cantidad incalculable de tiempo y dinero. Sin embargo, si el problema de optimización tiene varios miles de variables y desigualdades lineales, como ocurre por ejemplo al establecer el horario de unas líneas aéreas o los recorridos de las llamadas telefónicas, la comprobación puede ser un poco lenta, incluso para un ordenador. Para estas ocasiones existe un algoritmo, inventado recientemente por Narenda Karmarkar, investigador de los AT&T Bell Laboratories, que a menudo es más rápido en la determinación del horario más eficaz o el recorrido más corto.

Cuando las condiciones no son lineales, los problemas son mucho más difíciles de tratar. Me es grato informarles de que los problemas de programación no lineal frecuentemente colapsan los superordenadores más potentes.

Índice